MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

EXPLORANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA

ARTIGOS

VOLUME I

BRASÍLIA
2004

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
Francisco das Chagas Fernandes

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
Antonio Ibañez Ruiz

DIRETORA DE ENSINO MÉDIO
Lúcia Helena Lodi

DIRETORA DO DEPARTAMENTO DE POLÍTICAS EDUCACIONAIS
Jeanete Beauchamp

COORDENADORA-GERAL DE ESTUDOS E AVALIAÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS E PEDAGÓGICOS
Nabiha Gebrim

SELEÇÃO E ORGANIZAÇÃO
Ana Catarina P. Hellmeister
Déborah M. Raphael

ORGANIZAÇÃO GERAL
Suely Druck

REVISÃO
Silvana Cunha de Vasconcelos Castro
Suely Bechara

PROJETO GRÁFICO
Enrique Pablo Grande
Mariano Maudet Bergel
Luciana Cristina Ceron

Tiragem 33 mil exemplares

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA
Esplanada dos Ministérios, bloco L, sala 500
CEP-70.047-900 Brasília-DF

Tel. (61) 21048617/21048613
www.mec.gov.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

E96e Explorando o ensino da Matemática : artigos : volume 1 / seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister... [et al.] ; organização geral Suely Druck. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.
240 p.

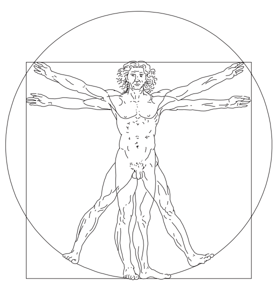
ISBN 85-98171-13-1

1. Ensino de Matemática. 2. Educação matemática. I. Hellmeister, Ana Catarina P. II. Druck, Suely. III. Brasil. Secretaria de Educação Básica. IV. Título.

CDU : 51:37

APRESENTAÇÃO

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos “lendo” na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. É quase impossível abrir uma página de jornal cuja compreensão não requeira um certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem que lhe é própria: porcentagens, gráficos ou tabelas são necessários na descrição e na análise de vários assuntos. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Um médico que interpreta um eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático; ao dar um diagnóstico, está utilizando o raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística. Um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcihos na época dos faraós. Uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.



Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Para isso, é importante compartilhar experiências que já foram testadas na prática e é essencial que o professor tenha acesso a textos de leitura acessível que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos.

APRESENTAÇÃO

Inserir o conteúdo num contexto mais amplo provocando a curiosidade do aluno ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através de uma real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. Não se trata, é claro, de repetir um caminho que a humanidade levou séculos para percorrer. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para a tentativa e erro é importante para desenvolver alguma familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. Da mesma forma que é possível ler um texto, palavra após palavra, sem compreender seu conteúdo, é também possível aprender algumas "regrinhas" e utilizar a Matemática de forma automática.

Com o objetivo de ajudar o professor nos vários campos apontados acima, reunimos uma coletânea de artigos extraídos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.

O material aqui apresentado sugere abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e apresenta uma variedade de situações cotidianas em que a matemática se faz presente. Ao mesmo tempo, explora, em cada caso, o conteúdo de forma rigorosa e sistemática, levanta problemas e indica soluções e, nesse processo, expõe os meandros do raciocínio matemático.

Os textos escolhidos estão distribuídos em dois volumes e abordam conteúdos curriculares da 5ª à 8ª série do ensino fundamental.

No primeiro volume incluímos artigos que tratam de História, Geografia, Astronomia, situações do cotidiano, cultura geral, crônicas e problemas. Enfim, muito do que possa fornecer situações com modelagem matemática, ligando a Matemática ao desenvolvimento do conhecimento humano de diversas áreas, foi aqui reunido. Os artigos possibilitam que o professor amplie sua visão e insira os conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar, de modo que possam ser utilizados para desenvolver atividades interessantes junto aos estudantes explorando novas perspectivas e permitindo um outro olhar.

No segundo volume, são sugeridas atividades em sala de aula utilizando materiais de fácil acesso (canudos, cartolina, jornal, barbante, etc.) ou explorando situações do cotidiano onde a matemática está presente. A atividade lúdica está sempre ligada a conteúdos matemáticos que são explorados e aprofundados.

O professor e educador George Polya (1887-1985), autor do livro *A arte de resolver problemas* , afirmava, muito adequadamente, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela. Com estes dois volumes esperamos compartilhar com nossos colegas professores experiências bem sucedidas em sala de aula e, sobretudo, esperamos compartilhar um pouco da beleza e da riqueza da Matemática.

É com grande entusiasmo que a Secretaria de Educação Infantil e Fundamental realiza este projeto, agradecendo a participação da comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

VOLUME 1

ARTIGOS

Introdução

Neste volume apresentamos artigos – cuja leitura leva a aprofundar o conhecimento do professor – que podem ser utilizados em sala de aula, quer por meio de atividades elaboradas pelo professor, quer como incentivo a reflexões sobre os temas abordados.

Há artigos sobre história da Matemática, que mostram o desenvolvimento do pensamento matemático, e há os que podem ser relacionados com a história do Brasil, como *Medidas na carta de Caminha. As pirâmides do Egito e a razão áurea*, *Geometria e Astronomia, Uma aula de Matemática no ano 1000*, por exemplo, vinculam a Matemática à história do conhecimento da humanidade. A Geografia está contemplada em O *centro geográfico do Brasil*, entre outros.

Há um grande número de crônicas, entre as quais *Sargú e a arte de calcular na areia*, *O menino,* que, além de proporcionarem leitura agradável, colocam problemas e apresentam curiosidades matemáticas.

Situações do cotidiano são resolvidas matematicamente em alguns artigos, tais como: *Ano bissexto*, *A mídia e a Mega-Sena acumulada, Como abrir um túnel se você sabe Geometria*.

Há também os artigos que abordam temas de cultura geral, que explicam certos procedimentos ou conteúdos matemáticos, exploram novas perspectivas, propiciando outras interpretações. De um modo geral, os textos aqui relacionados possibilitam ao professor ampliar sua visão e inserir conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar.

ÍNDICE

Capítulo 1 – Crônicas
Sargu e a arte de calcular na areia –
Alejandra Soto Ferrari 13
O menino –
Ledo Vaccaro Machado 20
A mídia e a mega-sena acumulada –
Flavio Wagner Rodrigues 23
Na ilha dos sapatos gratuitos –
Manoel Henrique Campos Botelho 29
Malba Tahan e a escrava de olhos azuis –
Zoroastro Azambuja Filho 34
Sobre uma história de Malba Tahan –
Jesús A. P. Sánchez 39
A lei de Alcides –
Paulo Afonso da Mata Machado 41
O editor e a média –
Luiz Márcio Imenes 43
Um punhado de Feijões –
Abdala Gannam 48

Capítulo 2 – Números
Fazendo contas sem calculadora –
Geraldo Ávila 53
O Papiro de Rhind e as frações unitárias –
Arthur C. Almeida e Francisco J. S. de A. Corrêa 61
A prova dos noves –
Flávio Wagner Rodrigues 68
Ano Bissexto –
Vicenzo Bongiovanni 73
Conceitos e controvérsias –
Elon Lages Lima 75
Fazendo mágica com a Matemática –
Oscar Guelli 80
Um método para o cálculo do MDC e do MMC –
Roberto Ribeiro Paterlini 84
Outros Critérios de Divisibilidade –
Mário Gustavo Pinto Guedes 88
Uma equação motivadora –
Gilder da Silva Mesquita 93
Frações: da forma fracionaria à decimal – A lógica do processo –
Nilza Eigenheer Bertoni 96
Algumas técnicas operatórias de outros tempos e de outros lugares –
Ronaldo Nicolai 101

Capítulo 3 – Geometria
Retângulo áureo e a divisão áurea –
Geraldo Ávila 109
As pirâmides do Egito e a razão áurea –
José Cloves Verde Saraiva 117
Quando a intuição falha –
Joel Faria de Abreu 122
De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda “IDEAL” –
Geraldo Garcia Duarte Júnior 124
O que é um número p? –
Elon Lages Lima 126
O problema do retângulo inscrito –
Roberto Ribeiro Paterlini 130

Triângulos especiais –
Rizio Sant'Ana 135
A demonstração feita por Heron –
Mário Dalcin 138
Octógono Perverso –
Cláudio Arconcher 140
Bom senso, realidade e melhores idéias matemáticas –
Nilza Eigenheer Bertoni 141
O conceito de ângulo –
Cláudio Arconcher 149
Trigonometria e um antigo problema de otimização –
José Luiz Pastore Mello 152
Método geométrico para o cálculo da raiz quadrada –
Francisco Rocha Fontes Neto 156
Como abrir um túnel se você sabe Geometria –
Euclides Rosa 158
Mania de Pitágoras –
Euclides Rosa 163
O problema do relógio –
António Leonardo P. Pastor 166
Geometria e Astronomia –
Geraldo Ávila 167

Capítulo 4 – História
Uma aula de Matemática no ano 1 000 –
Ana Catarina P. Hellmeister 177
As mulheres na Matemática –
Daniel C. Morais Filho 186
Arquimedes e a coroa do rei –
Severino de Souza 192
Euclides, Geometria e Fundamentos –
Geraldo Ávila 199
Finalmente Fermat descansa em paz –
Flávio Wagner Rodrigues 206
A regra da falsa posição –
Oscar Guelli 207
Medidas na carta de Caminha –
Mozart Cavazza P. Coelho 214

Capítulo 5 – Álgebra
Um professor em apuros –
Jesús A. Pérez Sánchez 219
Visualizando as equações –
Oscar Guelli 223
Uma equação interessante –
Cláudio Possani 230
As ternas pitagóricas novamente –
Cláudio Arconcher 234
O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções
Maria Alice Gravina 236
Média Harmônica –
Seiji Hariki 244
Equações e inequações com radicais –
Geraldo Ávila 252
A linguagem da lógica –
Iole de Freitas Druck 257

Capítulo 6 – Ensino
Alunos inventam problemas –
Sylvia Judith Hamburger Mandel 269
A Matemática na escola – Alguns problemas e suas causas
Roberto Markarian 273
A carroça na frente dos bois –
Anamaria Gomide Taube 282
Ensino no ensino fundamental (uma experiência) –
Cristina Frade 284
E lá vamos nós de novo! –
Flávio Wagner Rodrigues 287

Capítulo 1

Crônicas

Sargu e a arte de calcular na areia

Alejandra Soto Ferrari

Numa terra muito distante, no Oriente, vivia um jovem de grandes ideais e muitos sonhos que trabalhava desde o amanhecer, cultivando a terra. Almejava sem descanso que seu destino mudasse; desejava ter a coragem e a sorte daqueles incansáveis viajantes que percorriam terras longínquas pelos confins do universo, apreciando novos pratos e aromas e admirando cores e perfumes jamais imaginados.

O nome desse rapaz era *Sargu*, conhecido como "o obstinado" devido a sua incansável disposição de mudar seu destino. Era filho de camponeses e tinha apenas 16 anos. Apesar dos grandes esforços dos pais para que se dedicasse à terra, como eles, *Sargu*, sempre que podia, escapava de seus trabalhos no campo e subia ao alto de um morro, onde deixava a imaginação voar; olhava o horizonte tentando ver tudo que lhe era proibido.

Todos os dias eram iguais para *Sargu*; terminava sua jornada e se punha a sonhar, esperando algum acontecimento que mudasse sua vida, ansiando por deixar de arar a terra e ir em busca das aventuras que, mais de uma vez, ouviu dos mercadores que chegavam a seu povoado.

Em um dourado entardecer, *Sargu*, absorto em seus sonhos, avistou ao longe as figuras de vários homens e animais. À medida que o grupo se aproximava, as imagens se tornavam mais claras e eram tantos camelos e asnos, que não poderia dizer quantos. Viu muitos e logo começou a fazer linhas e outros sinais na areia para registrar em algum lugar o que via. Fez tantas marcas que não podia acreditar; sem dúvida o senhor que vinha em um dos camelos, no início da caravana, era um homem rico.

Eram por volta de cem camelos e asnos carregados com todo tipo de especiarias, tecidos e vasilhas, propriedade de um rico mercador apelidado de *Mestre*, cujo verdadeiro nome era *Fargot.* Era um homem de aproximadamente 50 anos, de poucas palavras e poucos amigos, de voz áspera e olhar penetrante. Sua pele estava endurecida pelo sol e pela areia e, apesar de sua riqueza, era um homem de modos e gostos simples.

Viajava acompanhado da família, constituída por três esposas, vários filhos e sua mais preciosa jóia, sua filha *Tesia,* de 15 anos, além de muitos empregados que o serviam e viviam sob sua proteção.

A caravana, que nunca tinha sido tão numerosa, passava ano após ano pelas terras onde morava *Sargu*, estabelecendo-se na margem do rio e oferecendo suas mercadorias aos habitantes das aldeias próximas.

Quando *Sargu* notou *Tesia* entre a multidão, ficou cativado pela beleza e encanto daquela donzela de grandes olhos amendoados e soube que finalmente havia chegado o momento pelo qual tanto esperara. Era hora de empreender o vôo, de conhecer terras desconhecidas, lugares nos quais só poucos haviam estado, mistérios que ninguém havia imaginado; era hora de aceitar o convite que a cada tarde lhe fazia o horizonte. *Tesia* precisava conhecê-lo, e conquistá-la seria seu grande feito. Andou incansavelmente pela feira que havia sido instalada no local, observando com grande interesse as mercadorias dos comerciantes, e permaneceu horas tentando ver alguma transação. Todas elas eram realizadas pelo *Mestre*.

Cada vez que se fazia uma venda importante, chamavam-no e ele tirava uma bolsa de pano que guardava sob as roupas e, pondo-se de joelhos, fazia com grande rapidez sulcos na areia, nos quais colocava pequenas bolinhas de metal. Logo dizia as quantias finais, ante a perplexidade de todos os que o observavam. Geralmente, os compradores e seus ajudantes utilizavam cordas com nós, sementes ou pequenos pedaços de madeira para fazer as contas, mas ninguém superava a exatidão e rapidez do *Mestre*.

Quando *Sargu* notou o que *Fargot* fazia, ficou maravilhado: achou que ele era um mago ou um bruxo e se propôs a aprender com o *Mestre*, mesmo que isso implicasse ter que deixar os seus familiares para se unir à caravana.

No dia em que se desfez a feira e o grupo se dispôs a partir, *Sargu* implorou ao *Mestre* que o levasse, que lhe ensinasse sua magia, e prometeu trabalhar só por leito e comida. *Fargot*, comovido com tamanha insistência, relutou por um momento, dado o modo como o rapaz olhava para sua querida filha; entretanto, algo nesse moço o fazia sentir como se olhasse para si próprio, e assim, mais tarde, permitiu que ele se juntasse à caravana; porém lhe disse: "Minha arte não é magia e tampouco sou mestre, como me chamam por aqui, portanto não posso ensinar-lhe, só posso dizer que me observe e aprenda: conte os dedos das mãos, uma, duas vezes e vá sempre na direção do seu coração".

E, assim, *Sargu* se uniu ao grupo e foi rapidamente aceito por todos, graças a sua tão particular maneira de pensar e seu espírito solidário. Logo tratou de se aproximar de *Tesia*, estabelecendo-se entre eles uma bela amizade, que não demorou a se transformar em verdadeiro amor.

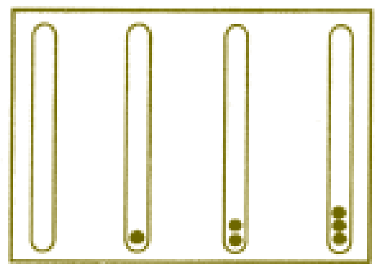
Sargu temia que o *Mestre* o expulsasse da caravana por sua origem humilde e logo se propôs, com determinação, ser digno do amor de *Tesia*. Enquanto a caravana percorria diversas regiões, transcorreu bastante tempo, e todas as noites em que demorava para conciliar o sono *Sargu*, como se estivesse jogando, fazia sulcos na areia, nos quais colocava pedrinhas arredondadas, imitando os gestos de *Fargot.*

Uma noite, cansado de não entender, relembrou uma conta feita pelo *Mestre* e conseguiu contar como ele: 123 camelos e 52 asnos, que eram a totalidade de animais que possuíam. Por fim havia entendido: o que *Fargot* fazia era decompor as cifras sobre os sulcos na areia mediante as bolinhas. Primeiro contava, depois decompunha e finalmente somava. Mas como fazia isso?

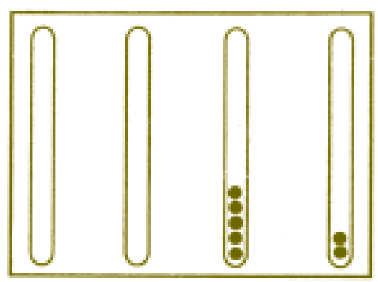
Sargu percebeu que contar até dez era muito importante, daí o *Mestre* ter-lhe dito para contar os dedos de ambas as mãos. Em cada sulco havia, de um modo especial, um 10 implícito. Então se lembrou das outras palavras do *Mestre*: "vá sempre na direção do seu coração" e as repetiu uma e outras vezes, até que, em um segundo – *zás* –, descobriu: tratava-se de contar da direita para a esquerda!

Desse modo, *Sargu* conseguiu montar o seguinte esquema na areia: tinha 123 risquinhos que representavam a quantidade de camelos; ele os agrupou de 10 em 10, fazendo um círculo em cada grupo, formando assim 12 grupos e sobraram 3 riscos sem agrupar. Então fez um círculo maior que continha os 10 primeiros grupos e assim sobraram 2 grupos de 10 risquinhos, mais os 3 riscos avulsos.

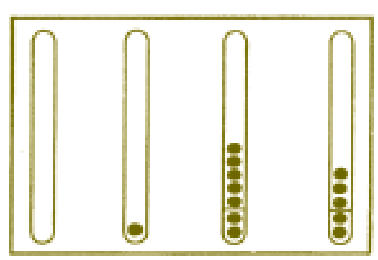
Os 3 riscos avulsos foram representados por 3 pedrinhas colocadas no primeiro sulco, à direita do grupo de sulcos que havia previamente feito na areia. Os 2 grupos de 10 riscos foram representados por 2 pedrinhas, colocadas no sulco seguinte, à esquerda do anterior, e finalmente ele pôs 1 pedrinha à esquerda de todas as anteriores, em representação do grupo maior, de 10 grupos de 10 riscos cada um. Desse modo obteve o seguinte sobre os sulcos:



Fez o mesmo para contar os asnos e obteve o seguinte:



O *Mestre* normalmente utilizava 3 grupos ou mais de sulcos, dependendo do tamanho da soma, e usava um sulco independente para os resultados. Desse modo *Sargu* transportou todas as bolinhas para um terceiro conjunto de sulcos e obteve:



Sargu estava simplesmente eufórico. Havia descoberto o grande mistério do *Mestre* e poderia ser um sábio, como tanto almejara, e então ser digno do amor de *Tesia*. Praticou muitas vezes até que lhe pareceu um jogo. Começou a não precisar de tantos sulcos e logo chegou a fazer as contas em um só grupo, no qual ele diferenciava as quantidades usando pequenos pedaços de madeira para separá-las.

Um dia o *Mestre* caiu enfermo de um estranho mal, suas pernas não respondiam, e a caravana precisou permanecer longos meses parada no deserto, nas proximidades de um pequeno riacho. Reinou a fome e a desolação e as vendas caíram consideravelmente devido ao isolamento do grupo. Por necessidade, venderam muitos camelos e asnos a um preço bastante baixo.

A comida e o gado ficaram cada vez mais escassos e as barras cunhadas de prata, poupadas em épocas melhores, desapareceram por completo ao serem trocadas por mercadorias de primeira necessidade nas aldeias vizinhas.

Foi então que passou pelo acampamento um conhecido estelionatário, que chamavam de *O Príncipe Negro*, e seu bando de agiotas, vindos da cidade de *Nínive*. Esse homem e seu séquito souberam da desventura da caravana do *Mestre* e viram no desolado grupo a possibilidade de um grande negócio, no qual ganhariam muito.

O *Príncipe Negro* ofereceu uma quantidade tentadora de barras de prata pela compra de algumas especiarias e tecidos e da maior parte dos camelos e asnos que sobraram, além de um grande dote para levar consigo a belíssima *Tesia.*

O débil *Fargot* não tinha forças para se pôr em pé, nem mesmo para ajoelhar-se para comprovar as contas do que deveria receber. Foi então que *Sargu* interferiu habilmente, entregando ao *Mestre*, em seu leito, uma tábua de argila na qual havia talhado vários sulcos verticais paralelos, que imitavam perfeitamente os sulcos na areia. *Sargu* explicou ao *Mestre*, com todos os detalhes, o tremendo logro a que se exporia se aceitasse o negócio proposto pelo *Príncipe Negro.*

Fargot ficou perplexo diante da exatidão das contas e da habilidade e perícia do rapaz para fazê-las, de modo que muito satisfeito e agradecido não aceitou o negócio, e os malfeitores fugiram sem deixar rastros.

O *Mestre* abençoou *Sargu* e lhe disse:

– Agora sou eu quem lhe pede para ficar e ensinar a mim e aos meus o que aprendeu. Tenho sido muito egoísta em querer que ninguém mais saiba sobre a arte de contar na areia. Com o seu invento poderei fazer as contas mesmo no meu leito. Você aperfeiçoou minha arte e é melhor que eu. Peça o que quiser, você é um obstinado muito inteligente.

Sargu, emocionado, pensou por alguns instantes e respondeu:

– Quero ficar ao seu lado para sempre, ser seu sócio e amigo. Além disso quero a mão de sua filha para que me abençoe com sua descendência e, acima de tudo, quero ser um mestre e ensinar pelo mundo a arte de calcular.

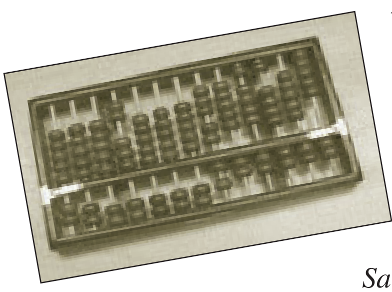
Fargot atendeu aos desejos do rapaz, mas bem no fundo de seu coração sentia que seu fim se aproximava. Como sua enfermidade o consumia lentamente, deixou seu destino e o dos seus nas mãos do rapaz, permitindo que se festejasse o casamento entre ele e sua filha.

Graças a *Sargu* puderam continuar sendo os prósperos e ricos mercadores de sempre, só que agora levavam uma escola errante, aberta a todos que quisessem aprender a contar no ábaco, nome que se deu ao sistema utilizado por sulcos e bolinhas sobre a areia.

Sargu era o *Grande Mestre*, ensinava incansavelmente e repetia:

– *Cada bolinha no primeiro sulco à direita corresponde a uma unidade; cada bolinha no segundo sulco, indo para a esquerda, significa* 10 *unidades; cada bolinha no terceiro sulco corresponde a* 10 *unidades de* 10*, isto é,* 100 *unidades, e assim sucessivamente. Recordem: Para somar ou subtrair dois números, diferenciamo-los separando-os por pedacinhos de madeira ou outro material similar, mas nunca deve haver mais que 9 bolinhas em cada sulco.*

Por fim *Fargot* morreu e deixou todos os seus bens para *Sargu*. *Fargot* cuidou para que nada faltasse às suas mulheres e aos seus adorados filhos e descendentes. Suas últimas palavras expressaram seu desejo de que a escola errante jamais se detivesse e que seus ensinamentos atingissem os confins do Universo, sem distinção de nenhum tipo, nem social nem racial.



É por isso que *Sargu* decidiu destinar o resto de sua existência à difusão e ao aperfeiçoamento do ábaco, que foi evoluindo, pouco a pouco, ao passar pelas diferentes culturas e civilizações do Oriente e do Ocidente. Porém, em essência, o ábaco permanece o mesmo, e graças a ele se deu um importante passo em Matemática, conhecido como a *notação com valor posicional* (o valor de uma bolinha depende do lugar ou sulco que ocupa).

Sargu percorreu os lugares mais incríveis com seu invento, visitou a China e a Índia, entre outros lugares da Ásia, onde, dizem, se aperfeiçoou ainda mais na arte do ábaco. Desenhou-se um ábaco com bolinhas sobre eixos fixos, que, além de ser mais cômodo, uma vez que evitava o constante cair das bolinhas, facilitou as operações com quantidades maiores.

Temos informação de sua existência no Oriente só a partir do século XIII d.C., de onde, supõe-se, teria passado ao Japão com outras modificações.

O ábaco que *Sargu* difundiu se firmou fortemente na *Mesopotâmia* devido à complexidade de sua escrita, repleta, particularmente na numeração, de símbolos incômodos e confusos.

Também se difundiu na maioria das terras civilizadas. O ábaco utilizado na Roma antiga era metálico, em geral de prata ou bronze, e era formado por dois conjuntos de sulcos paralelos, um sobre o outro. No conjunto dos sulcos inferiores havia 4 bolinhas em cada um, enquanto no conjunto dos superiores havia uma só bolinha. A bolinha do sulco superior representava 5 vezes a bolinha correspondente no sulco inferior. Assim o calculista podia representar qualquer número.

À direita do ábaco de metal havia um conjunto separado de sulcos utilizados para se trabalhar com frações, o que faz sentido, já que os romanos dividiam sua moeda em quartos.

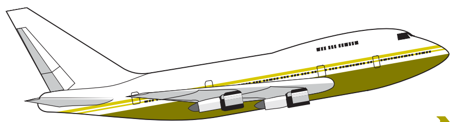
A palavra que os romanos usavam para denominar as bolinhas ou pedrinhas era *calculus*, do latim (quem não ouviu falar de cálculos renais?), da qual vem nossa palavra *calcular*.

Muito tempo depois, na época de *Cólon,* alguns comerciantes e donos de negócios do oeste da Europa ainda utilizavam tabuleiros de contas, que traziam algumas modificações em relação ao antigo funcionamento, mas obedeciam aos mesmos princípios do ábaco da antigüidade.

Os ábacos modernos, chineses, japoneses e russos, chamados respectivamente de *Swa Pan*, *Soroban* e *Scoty*, ainda funcionam com grande facilidade e rapidez nos seus países, embora seu uso esteja condenado a desaparecer, devido à utilização crescente das calculadoras.

O menino

Ledo Vaccaro Machado



Não havia saída. Teria que esperar por três horas o próximo vôo para Salvador. Arquiteto por formação e profissão, tinha que apresentar um projeto na manhã seguinte, numa cidade próxima à capital da Bahia. Assentei-me como pude. Teria que olhar para aquele relógio pendurado no teto por três horas. Como se não bastasse, o relógio registrava os segundos. Relógios que registram segundos demoram mais que os que não o fazem.

Alguns apelam para palavras cruzadas, outros giram os polegares e eu, como o vício do cachimbo entorta a boca, traço em folhas de papel as formas que se me apresentam no ambiente que é alcançado pelas retinas. Lápis e papel na mão, registrava dois lances de escada e uma escada rolante que surgiram a minha frente. Mal traçara as primeiras linhas, deparei-me com uma questão que me intrigou: quantos degraus deveria desenhar na escada rolante? Em vão, tentei contar os degraus visíveis. Se a escada parasse, poderia contá-los. Tive ímpetos de apertar o botão vermelho próximo ao corrimão, onde se lia “PARAR”. Meu censurador não permitiu que o fizesse. Fiquei ali, inerte, com o cachimbo na mão e sem poder fumar.

Um menino sentou-se ao meu lado, brincando com uma bolha de sabão. Sem tirar os olhos da bolha, ela disse em voz clara e pausada:

– Pepino não parece “inreal”?

Olhei-o, ligeiramente, com o canto dos olhos e, sem nada dizer, retornei ao meu cachimbo

apagado. Alguns instantes depois, senti minha camisa ser puxada e escutei novamente:

– Pepino não parece “inreal”?

Dessa vez, com uma mão segurando a bolha e com a outra puxando a minha camisa, ele me olhava firmemente.

– Não é “inreal”, é irreal.

– Pois é, não parece?

Aquela insistência irritou-me. Eu, diante do mais intrincado problema da existência humana – quantos degraus ficam visíveis quando a escada rolante pára – e aquele menino me questionando sobre a realidade de um pepino! Tentando dissuadi-lo, resolvi apresentar-lhe a complexidade do problema que me afligia.

– Olha, menino, estou tentando desenhar aquelas escadas e não sei como acabar o desenho da escada rolante. Quantos degraus devo desenhar? Meu desenho está parado e a escada está subindo. Se a escada parasse de repente, quantos degraus ficariam visíveis?

Sem nada dizer, colocou a bolha de sabão sobre a cadeira, subiu e desceu um dos vãos da escada. Apontando para o relógio, disse:

– Eu desço a escada duas vezes mais rápido do que subo.

E repetiu sua viagem ao vão da escada, mostrando-me que, no mesmo tempo em que dava um passo para subir, dava dois para descer. Novamente sem nada dizer, começou a subir a escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de vinte passos. Do alto da escada, olhou-me como quem estivesse fazendo a mais óbvia das coisas, e começou a descer a mesma escada rolante, contando os passos: um, dois, três, ..., num total de trinta e cinco passos.

Em seguida tomou o lápis e o papel de minhas mãos e completou, com traços infantis, o meu desenho.

Nenhum censurador poderia me conter. Levantei-me bruscamente e apertei o botão vermelho. Ansioso, comecei a contar os degraus. Para meu espanto, correspondia ao desenho do menino. Com a maior seriedade que já tive em minha vida voltei-me para o menino e perguntei-lhe:

– Por que o pepino parece “inreal”?

Quantos degraus o menino desenhou?

Vamos à resposta:

Vamos tomar como unidade de tempo o tempo no qual o menino dá um passo subindo a escada. Seja n o número de degraus da escada rolante que desaparecem (ou surgem) na unidade de tempo. Como o menino deu 20 passos para chegar ao topo da escada, ele demorou 20 unidades de tempo. Isso significa que desapareceram $20n$ degraus. Chamando de N o número de degraus visíveis, temos:

$$N = 20 + 20n \text{ ou } n = \frac{N - 20}{20}. \quad (1)$$

O menino deu 35 passos para descer a escada rolante (que sobe). Lembremos que a freqüência de seus passos é duas vezes maior na descida que na subida. Ou seja, o tempo de dar dois passos descendo é igual ao de um passo subindo. Cada passo na descida demora $1/2$ da unidade de tempo. Ele demorou 35/2 unidades de tempo para descer a escada. Isso significa que surgiram $\frac{35n}{2}$ degraus novos. Assim,

$$N = 35 - \frac{35n}{2} \text{ ou } n = \frac{70 - 2N}{35}. \quad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{N - 20}{20} = \frac{70 - 2N}{35},$$

$$35N - 700 = 1400 - 40N$$

ou

$$75N = 2100, \text{ de onde}$$

$$N = \frac{2100}{75} = 28.$$

O menino desenhou 28 degraus.

A mídia e a mega-sena acumulada

Flavio Wagner Rodrigues

Introdução

Entre todas as loterias existentes no Brasil, a megasena é, ao menos em determinadas ocasiões, a que desperta o maior interesse na população. Isso se deve ao fato de as regras do jogo possibilitarem, de vez em quando, que as quantias oferecidas como prêmio sejam bastante respeitáveis. Quando isso ocorre, formam-se filas gigantescas nas casas lotéricas e os jornais, o rádio e a televisão fazem matérias sobre o assunto que tratam desde as chances de que alguém ganhe o prêmio máximo até o que o felizardo poderá fazer com todo aquele dinheiro. Os professores que dão aulas de Probabilidade e de Análise Combinatória são consultados sobre o funcionamento do jogo e especialmente sobre a eventual existência de alguma estratégia que melhore as chances de vitória do apostador. Este artigo é um relato sobre as perguntas que me fizeram e sobre as respostas que eu fui capaz de dar.

Embora eu acredite que a maioria dos leitores da **RPM**, assim como eu, já tenha tentado a sorte na Mega Sena, vamos dar uma breve descrição do jogo para atender aos leitores que, ou por princípio, ou por serem mais inteligentes do que nós jogadores, nunca arriscaram. Para apostar, você escolhe um mínimo de seis e um máximo de quinze dezenas no conjunto {01, 02, ..., 60}. Cada aposta simples de seis dezenas custa um real e, portanto, e você marca oito dezenas, estará concorrendo com

$$\binom{8}{6} = 28$$

jogos simples, e essa aposta custará vinte e oito reais. A Caixa Econômica Federal, que administra o jogo, sorteia seis dezenas distintas e são premiadas as apostas que contêm 4 (quadra), 5 (quina) ou todas as seis (sena) dezenas sorteadas. Como é difícil que alguém acerte as seis dezenas sorteadas, o prêmio é geralmente dividido entre poucos acertadores. Se num dado concurso ninguém acerta as seis dezenas, o prêmio fica acumulado para o concurso seguinte. Existem

$$\binom{60}{6}$$

resultados possíveis para um sorteio da megasena. Esse número é maior que 50 milhões (mais precisamente, ele é igual a 50 063 860) e creio que o leitor concordará comigo que só mesmo um grande otimista pode acreditar que vai ganhar com uma única aposta.

As probabilidades de sucesso na Mega Sena

O cálculo das probabilidades de que um apostador ganhe os prêmios oferecidos é um exercício simples de Análise Combinatória. Vamos mostrar como esse problema é resolvido, através de um exemplo. Suponha que o apostador fez um jogo com 10 dezenas e estará, portanto, concorrendo com

$$\binom{10}{6} = 210$$

jogos simples de 6 dezenas. Segue-se que a sua probabilidade de ganhar a sena vale

$$210 \Big/ \binom{60}{6}.$$

Para o apostador ganhar uma quadra, é necessário que quatro das seis dezenas sorteadas estejam entre as 10 nas quais ele apostou, e duas estejam entre as outras 50. As quatro podem ser escolhidas de

$$\binom{10}{4} = 210$$

maneiras e as outras de

$$\binom{50}{2} = 1225$$

maneiras. Existem, portanto, $210 \times 1225 = 257250$ resultados que dariam o prêmio da quadra para o apostador. De modo análogo, mostra-se que existem 12 600 resultados que dariam ao apostador o prêmio da quina. Logo, os valores aproximados das probabilidades de que um apostador, que jogou dez dezenas ganhe os prêmios da sena, quina e quadra são respectivamente iguais a 1/238 400, 1/3 973 e 1/195. Com o mesmo raciocínio são calculadas as probabilidades de apostas com um número qualquer de dezenas. Uma questão interessante para um curso introdutório de Análise Combinatória é perguntar o que acontece quando o jogador acerta a sena com uma aposta que tem mais de seis dezenas. Mais especificamente, quantas quadras e quantas quinas ele acertará também? No nosso exemplo, com 10 dezenas, ele ganhará, além da sena, 24 quinas e 90 quadras.

A acumulação programada

Nas diversas loterias administradas pela Caixa, sempre que o prêmio maior não saía e a quantia a ele destinada acumulava para o concurso seguinte, o interesse dos apostadores crescia, resultando num aumento considerável no número de apostas. Embora essa situação fosse interessante para a Caixa, o governo e os lotéricos, a sua ocorrência dependia do acaso. Com o objetivo de manter o interesse dos apostadores e conseqüentemente aumentar a arrecadação, foi criada a acumulação forçada que reserva uma parte do prêmio (vinte por cento do total destinado à Sena) para ser acrescentada ao rateio dos concursos cujos números terminam em zero. Assim, por exemplo, em cada um dos concursos de números 201, 202, ..., 209, vinte por cento do prêmio da Sena ficam retidos para serem acrescentados ao prêmio do concurso 210. Em várias ocasiões o acaso também faz sua parte e isso acaba elevando o valor do prêmio a um patamar bastante alto. No segundo semestre de 1999, repetidas acumulações fizeram com que o prêmio superasse 60 milhões de reais. Esse valor, superior a 30 milhões de dólares, está no nível dos prêmios de loterias do primeiro mundo, principalmente se levarmos em conta que, aqui no Brasil, ele é isento de imposto de renda.

AS PERGUNTAS MAIS FREQÜENTES

1. Intuitivamente o que significa ter uma chance em cinqüenta milhões?

Com o objetivo de fazer com que seus leitores entendam o que significa essa probabilidade tão pequena, os jornalistas pedem que façamos comparações com a possibilidade da ocorrência de outros eventos. É curioso que as comparações solicitadas quase sempre envolvem um evento auspicioso (ganhar o prêmio máximo da megasena) com tragédias tais como morrer em desastre de avião, ser atingido por um raio ou morrer de câncer. A maior dificuldade em fazer essas comparações está no fato de que nem todos os indivíduos da população têm a mesma probabilidade de sofrer uma dessas desgraças, enquanto todos os que apostam 6 dezenas têm a mesma chance de acertar a megasena. Eu acredito que a maneira mais fácil de fazer as pessoas entenderem é usando um outro exemplo puramente aleatório. O número de habitantes do Brasil é quase igual a três vezes o número de resultados possíveis do sorteio. Se fosse realizado um sorteio de três prêmios entre toda a população brasileira, a sua chance de ganhar um deles seria igual à de ganhar o prêmio máximo da megasena com um jogo de seis dezenas. No *Você sabia?* da **RPM** 4l, pág. 29, foi observado que é mais fácil obter 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda do que ganhar na megasena com uma aposta de 6 dezenas.

2. Existe uma forma de apostar que melhore as chances do jogador?

Essa pergunta é geralmente feita na sala de aula por alunos curiosos em saber se o professor conhece algum truque ou algum sistema que preferencialmente garanta a vitória. A análise dos resultados dos sorteios realizados até hoje parece indicar que todas as dezenas são igualmente prováveis e que os resultados de diferentes sorteios são independentes. Não existem, portanto, elementos que nos permitam construir um sistema que melhore as nossas chances de vitória. Na sala de aula comento também que, se eu conhecesse um sistema, não iria contar para ninguém e provavelmente não estaria mais dando aulas.

3. Devo jogar no 13 que é a dezena que mais vezes foi sorteada, ou no 48, que foi a que saiu menos vezes?

O mesmo argumento usado na resposta da questão 2 nos leva a afirmar que, do ponto de vista teórico, tanto faz jogar no 13, no 48 ou em qualquer outra dezena. Agora, se você fizer questão de escolher com base nos resultados de concursos anteriores, eu recomendaria o 13 e não o 48. Isso porque, se tudo estiver funcionando corretamente, tanto faz, mas, caso exista uma pequena distorção (que os testes estatísticos não conseguem detectar), tudo indica que ela estaria favorecendo o 13 e não o 48.

4. Se eu estiver disposto a jogar 28 reais, é melhor fazer um único jogo de 8 dezenas ou vinte e oito jogos de 6 dezenas?

Essa é uma questão interessante, pois, embora as duas formas de jogar sejam equivalentes (supondo 28 jogos distintos de 6 dezenas) no que diz respeito à sena, isso não é verdade com relação à quadra e à quina. De fato, com um único jogo de 8 dezenas existirão

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{52}{1} = 2912$$

resultados possíveis que darão prêmio da quina ao apostador. Com um único jogo de 6 dezenas, o apostador terá

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{54}{1} = 324$$

resultados contendo uma quina. Se os vinte e oito jogos não tiverem nenhuma quina em comum, o total de resultados favoráveis será igual a $28 \times 324 = 9072$. A probabilidade de acertarmos uma quina com o segundo sistema é mais do que três vezes maior do que com o primeiro. Essa diferença é, pelo menos parcialmente, compensada pelo fato de que, acertando uma quina com o jogo de 8 dezenas, receberemos três vezes o valor do prêmio. Os mesmos cálculos efetuados para a quadra mostram que, com um jogo de 8 dezenas, nós teremos 92 820 resultados favoráveis e com 28 jogos de 6 dezenas (que não tenham quadras em comum) nós teremos 601 020 resultados favoráveis, o que nos dá uma probabilidade que é aproximadamente 6,5 vezes maior. Uma vez mais vale a pena observar que, se acertarmos a quadra com o jogo de 8 dezenas, receberemos 6 vezes o valor do prêmio.

5. Vale a pena jogar?

Do ponto de vista teórico, é fácil ver que a resposta é não. De fato, você estaria colocando dinheiro num jogo que destina apenas 44% da arrecadação para os prêmios e no qual a sua probabilidade de ganhar alguma coisa que valha a pena é muito pequena. Para aqueles que acreditam na sorte e gostam de arriscar de vez em quando, aí vão algumas sugestões:

a) Nunca aposte muito dinheiro. De fato, com a aposta de 15 dezenas, que custará 5 005 reais, a sua probabilidade de ganhar o prêmio é aproximadamente igual a 1/10000. Portanto, a probabilidade de que você perca o seu dinheiro é bem grande e, se você é capaz de perder 5 000 reais sem se importar, você é uma pessoa que não precisa de loterias.

b) Aposte de preferência nos concursos de final zero. Nesses concursos você não está contribuindo para o prêmio de futuros apostadores, está concorrendo a um prêmio maior e principalmente está concorrendo a quantias que outros já perderam.

Vamos terminar com um argumento que serve para justificar essa pequena fraqueza de arriscar de vez em quando. Se você pode, sem nenhum sacrifício, dispor de 10 reais por semana e decidir guardá-los, você terá, em valores corrigidos, 520 reais após um ano e conseqüentemente 10 400 reais após vinte anos. Com esse procedimento, a probabilidade de que você fique rico é zero. Se você jogar dez reais por semana, a probabilidade de que você fique rico é quase zero, mas não é zero.

Na ilha dos sapatos gratuitos

Manoel Henrique Campos Botelho

Uma Explicação pela Matemática ou pela Economia?

Cena nº 1 – O problema

Um dia, estava eu tranqüilamente na faculdade pensando na vida quando chegou um colega e me fez uma inusitada proposta:

– Você quer comprar de graça (?!) um sapato?

É claro que eu topei de cara comprar de graça(?!) um sapato, embora eu desconfiasse que houvesse algum rolo. As condições eram:

– primeiro comprar um selinho desse meu amigo. Preço R$ 3,00;

– juntar mais R$ 27,00 e o selinho e levar a uma loja próxima. Eu receberia um par de sapatos de valor de mercado de R$ 30,00 e mais dez selinhos no valor de R$3,00;

– bastaria então eu vender os dez selinhos que eu seria restituído dos R$ 3,00 iniciais de compra do selinho do meu amigo e dos R$ 27,00 que anexei para retirar o sapato da loja.

Expostas as condições topei o desafio. Dei R$ 3,00 ao meu colega para o inicio do processo, juntei mais R$ 27,00 e fui à loja. Efetivamente retirei um par de sapatos de valor de mercado de cerca de R$ 30,00 e ganhei os dez selinhos que me iriam restituir tudo o que investira.

Saí então a vender os dez selinhos. Vendi-os com alguma facilidade. Fiz então um balanço. Eu tinha até então gasto R$ 30,00, recebido R$ 30,00 e mais um par de sapatos. Um par de sapatos de graça, portanto. Quando se fechou o ciclo tive um estalo, teria ganho mesmo um sapato de graça? Como isso seria possível? Não estaria essa promoção violando a Lei de Lavoisier ou a Segunda Lei da Termodinâmica? Fiquei estarrecido com o problema. Como interpretá-lo?

Cena nº 2 – As explicações convencionais

Aturdido com o problema que aparentemente violava leis naturais nunca dantes questionadas, saí a conversar com meus colegas de faculdade. O primeiro a tentar responder foi Altarimando. Ele se entusiasmou.

“Não se preocupe se essa promoção fere ou não as leis da natureza. O importante é que funciona. Assim como você conseguiu comprar sapatos de graça vamos expandir o negócio para comprar arroz de graça, roupa de graça, etc. Talvez esse seja o perdido caminho para a humanidade alcançar o Nirvana, o tão desejado Shangrilá. Não se esqueça de que as Leis de Mercado são superiores à Lei de Lavoisier.”

Desconfiei que ele estava mais para poeta transcendental que crítico de Matemática e Física e fui procurar o Souzinha. Souzinha era um crítico de tudo. Logo deu seu parecer, claro e taxativo, incisivo e demolidor, característico de todo jovem de menos de quarenta anos:

“Estamos diante da chamada Bola-de-Neve, Conto da Venda Sucessiva ou ainda da Corrente da Felicidade. É um estratagema que favorece barbaramente os compradores iniciais e é altamente desvantajoso para os finais.”

Pode-se concluir facilmente que o número de compradores numa etapa x é:

$$F(x) = 10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^x$$

O universo possível de compradores é N - número finito inteiro. Logo a corrente se estabiliza antes da etapa y ou em y quando y é tal que:

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^y \geq N$$

Quando o somatório se iguala ou excede N, os últimos compradores serão prejudicados.

Logo, essa artimanha é tão simplesmente uma falácia. Continuam válidos, portanto, a Lei de Lavoisier e o Segundo Princípio da Termodinâmica.

Fiquei feliz, confesso, por essa explicacão do Souzinha.

As pessoas como nós, matemáticos e engenheiros, com a mente criada e disciplinada por critérios lógico-formais cartesianos têm verdadeiro horror a situações que fujam desse modo e, o que é pior, funcionem. Se isso pudesse ocorrer, ficaríamos inseguros, e toda uma vida ficaria questionada.

E o caro leitor, o que achou da historieta contada até aqui? Com qual explicação fica? Com a do feliz Altarimando ou com a do crítico Souzinha? Ou haveria uma terceira, inesperada e surpreendente alternativa? É o que veremos a seguir.

Cena nº 3 – A explicação diferente

Quando eu já estava disposto a encerrar o assunto, encontrei um velho amigo, Adão, estudante de Economia na Getúlio Vargas.

Apesar de jovem, Adão é crítico ponderado e profundo em seus conhecimentos.

Só como curiosidade, expus a ele o problema e as duas respostas que eu tinha ouvido até então.

Adão, filosoficamente, começou a raciocinar socraticamente.

– Quanto é mesmo que a loja recebe por par de sapatos vendido?

Ora Adão respondi, o enunciado é claro. Ela recebe R$ 30,00 por par de sapatos.

– Acho que aí temos uma pista. Acho que não é esse o valor, ponderou Adão. E continuou:

– Admitamos uma ilha com 1 111 pessoas potencialmente clientes dos sapatos e mais uma pessoa que é o dono da loja totalizando pois 1 112 pessoas. O dono da loja propõe o negócio a um primeiro cliente. Compre este selo por R$ 3,00 e adicione R$ 27,00 e deflagre o processo. Esse primeiro cliente vende dez selos. Dez compradores vendem depois para 100 outros compradores. Já são 111 compradores. Os cem compradores vendem agora para 1 000 compradores. Esses últimos 1.000 compradores que já gastaram cada um R$ 3,00 pelo selo não têm mais para quem vender. Uma de suas opções é perder esse selo. Outra (mais razoável) é acrescentar R$ 27,00 e ir buscar o seu par de sapatos que, como sabemos, vale no mercado R$ 30,00. Logo esses últimos compradores não serão prejudicados financeiramente (só não terão o seu sonho de sapatos grátis).

Agora façamos um raciocínio. Quanto recebeu a loja de sapatos e quantos pares de sapatos foram entregues? Curiosamente você verá que a loja não recebe R$ 30,00 por par de sapatos vendido.

A loja recebeu em dinheiro:

do 1.º comprador:	$3{,}00 + 27{,}00$	=	30,00
de 10 compradores:	$10 \times 27{,}00$	=	270,00
de 100 compradores:	$100 \times 27{,}00$	=	2700,00
de 1000 compradores:	$1000 \times 27{,}00$	=	27.000,00
	Total		R$ 30.000,00

Total de pares de sapatos vendidos = 1111

Receita média da loja por par de sapato $= \dfrac{30.000{,}00}{1111} \cong 27{,}03$.

Conclusão – A loja vende cada par de sapatos a R$ 30,00 e recebe na prática R$ 27,00 e não R$ 30,00 como supostamente se poderia pensar. Vê-se, portanto que cada pessoa para ganhar um par de sapatos precisa entregar o sinal (entrada) e ter o trabalho de vender dez outros sapatos. O caso em estudo é um processo que traz embutido um trabalho de venda como custo. Custo esse que é pago pela loja (30,00 – 27,03) = R$ 2,97 por par de sapatos. É uma comissão de venda. Tudo claro, Botelho?

Fiquei a pensar.

Como as coisas ainda estão algo confusas dentro de mim, peço apoio aos leitores da Revista do Professor de Matemática.

Vejam se existe alguma outra explicação. Mas por favor, prefiro receber respostas que não ponham em cheque Leis que até agora acreditei tão válidas como a Lei de Lavoisier, Teorema de Pitágoras, etc.

Ok?

NR: Uma resposta já temos

ERAM GRATUITOS OS SAPATOS?

RPM:

1. Se a historia passasse no instante em que nosso amigo Botelho acabou de vender seus dez selinhos, o que estaria acontecendo é que dez pessoas (os compradores dos selinhos) teriam se cotizado para comprar um par de sapatos para ele.

2. Na história, nada obriga que cada comprador se limite a adquirir um par de sapatos apenas. Para citar um caso extremo, podemos supor que o primeiro comprador, em vez de vender os 10 selinhos que recebeu da loja, fica com eles e com isso compra mais dez pares de sapatos a 18 mil cruzeiros cada, recebe 100 selinhos., etc, até acabar com o estoque da loja. Depois, revende todos os sapatos ao preço oficial de 200 mil cruzeiros. Em vez de um par de sapatos de graça, ganha muito mais.

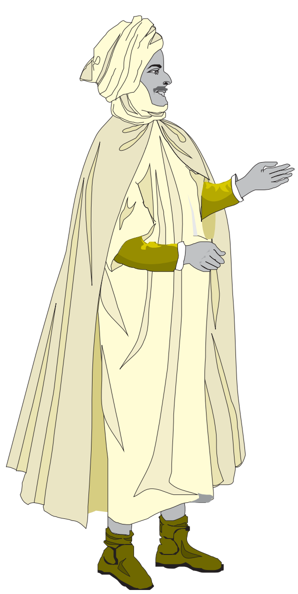
3. Do ponto de vista da loja, o que ela fez corresponde simplesmente a vender cada par de sapatos a 18 mil cruzeiros , exceto o primeiro, vendido por 20 mil. Os selinhos são apenas um truque de marketing. A loja vende por 18 mas, como o preço usual é 20, a diferença é dividida entre alguns felizardos, ou espertos. O exemplo do economista Adão, em que cada habitante da ilha compra apenas um par de sapatos, é o extremo oposto do caso 2 acima. Na prática ocorrem, em geral, situações intermediárias em que algumas pessoas formam estoque para revenda (podendo em seguida organizar cartéis para manipular os preços, mas isto já seria outra história).

Malba Tahan e as escravas de olhos azuis

Zoroastro Azambuja Filho

Na seção de livros de uma loja de departamento, deparei-me outro dia, por acaso, com um exemplar da 27ª edição de *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan. (Editora Record, Rio de Janeiro, 1983). Quarenta anos depois de o ter lido pela primeira vez, não resisti à tentação nostálgica de reviver antigas emoções. Comprei-o e o reli. Para os mais jovens leitores da **RPM**, talvez tenha alguma utilidade dizer algumas palavras sobre esse autor e sua obra.

Malba Tahan, pseudônimo do Professor Júlio César de Mello e Souza, exerceu uma influência singular entre os estudantes da minha geração. Para os não-especialistas, em particular para a imprensa, ele foi, enquanto viveu, o maior matemático do Brasil. Esse julgamento, que pouco tinha a ver com a realidade, resultava principalmente do grande número de livros que ele escreveu (quase uma centena), muitos deles sobre Matemática. Eram livros de divulgação, escritos num estilo claro, simples e agradável, peculiar ao autor. Neles, a ênfase maior era dada à História da Matemática e a exposições sobre tópicos elementares, inclusive da Matemática que fora moderna no princípio deste século, com destaque para aspectos pitorescos, paradoxais, surpreendentes ou controversos.



Embora os livros de Malba Tahan tenham sido criticados por tratarem seus assuntos de forma superficial, por conterem alguns erros sérios de concepção por serem em grande parte, meras compilações e coletâneas de citações, é forçoso reconhecer que alguns desses livros tiveram grande aceitação. O que significa que havia no país um numeroso público, na maioria jovem, ávido por conhecer melhor a Matemática, sua história e seus desenvolvimentos. Principalmente pessoas ansiosas por ouvir alguém falar da Matemática sob forma menos árida e antipática do que seus tradicionais e severos professores, com seus igualmente áridos compêndios. Essa necessidade foi suprida, devemos admitir, com bastante sucesso, por Malba Tahan.

Olhando em retrospecto, podemos hoje achar que esse papel de propagandista da Matemática deveria ter sido ocupado por alguém com melhor treinamento profissional, isto é com mais competência científica. Alguém como Amoroso Costa, talvez. Mas Amoroso morreu cedo e, mesmo assim, em que pese a sua vasta cultura, o país ainda não estava maduro para um divulgador do seu nível.

Malba Tahan surgiu na hora certa, com o nível e o estilo que minha geração queria. Se o analisarmos como matemático, estaremos olhando para o lado errado. Mas, se mudarmos o enfoque, podemos vê-lo mais adequadamente como jornalista, divulgador, antologista ou contador de histórias. Como contador de histórias, ele tem grandes momentos e *O Homem que Calculava* é o seu melhor trabalho. Em suas 27 edições, *O Homem que Calculava* muito fez para estimular o cultivo da arte de resolver problemas, incutir o amor pela Matemática e destacar aspectos nobres e estéticos desta Ciência. Eu era menino quando minha irmã mais velha ganhou um exemplar desse livro como presente de seu professor. Lembro-me que o devorei avidamente. E ao relê-lo agora, não obstante os muitos *calos* que me deixou o longo exercício do magistério, ainda senti algumas das mesmas emoções de outrora, diante de certos trechos de rara beleza.

Como toda obra, o livro tem seus pontos altos e outros, nem tanto. Curiosamente, as coisas que mais me agradaram na leitura de hoje foram aquelas das quais guardava ainda alguma lembrança desde a primeira vez.

O Homem que Calculava é a história de Beremiz Samir, um fictício jovem persa, hábil calculista, versado na Matemática da época, contada por um amigo, admirador e companheiro de viagens, uma espécie de Dr. Watson muçulmano. Em certas passagens, a narrativa das proezas matemáticas de Beremiz, nos diferentes lugares por onde passava, nos faz lembrar o Evangelho segundo São Marcos. O relato, feito por um maometano ortodoxo, é cheio de respeitosas evocações divinas e pontilhado pela linguagem pitoresca dos árabes de novela. Isto é feito com graça e dá um colorido especial ao conto.

Beremiz Samir resolve problemas curiosos – alguns propostos, outros acontecidos naturalmente em suas andanças. Faz também discursos eloqüentes sobre o amor a Deus, a grandeza moral e a Matemática. E dá aulas de Matemática bastante inspiradas à filha de um cheique, com a qual vem a casar-se no fim da história. Para que se tenha uma idéia dos problemas tratados, descrevemos o primeiro, o segundo e o último deles.

No primeiro problema, Beremiz e seu amigo, viajando sobre o mesmo camelo, chegam a um oásis, onde encontram três irmãos discutindo acaloradamente sobre como dividir uma herança de 35 camelos. Seu pai estipulara que a metade dessa herança caberia ao filho mais velho, um terço ao do meio e um nono ao mais moço. Como 35 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 9, eles não sabiam como efetuar a partilha. Para espanto e preocupação do amigo, Beremiz entrega seu camelo aos 3 irmãos, a fim de facilitar a divisão. Os 36 camelos são repartidos, ficando o irmão mais velho com 18, o do meio com 12 e o mais moço com 4 camelos. Todos ficaram contentes porque esperavam antes receber 17 e meio, 11 e dois terços e *3* e oito nonos, respectivamente. E o melhor: como $18 + 12 + 4 = 34$, sobraram 2 camelos, a saber, o que fora emprestado e mais um. Todo mundo saiu ganhando. Explicação: *um* meio mais *um* terço mais um nono é igual a 17/18; logo da menor do que 1. Na partilha recomendada pelo velho árabe sobrava algo, do que se aproveitaram Beremiz e seu amigo.

O segundo problema é uma pequena delícia. Beremiz e seu amigo, a caminho de Bagdá, socorrem no deserto um rico cheique, que fora assaltado, e com ele repartem irmãmente sua comida, que se resumia a 8 pães: 5 de Beremiz e 3 do amigo. Chegados ao seu destino, o cheique os recompensa com de oito moedas de ouro: 5 para Beremiz e 3 para o amigo. Todos então se surpreendem com os suaves protestos de Beremiz. Segundo este, a maneira justa de repartir as 8 moedas seria dar 7 a ele e 1 apenas ao amigo! E prova: durante a viagem, cada refeição consistia em dividir um pão em 3 partes iguais, e cada um dos viajantes comia uma delas. Foram consumidos ao todo 8 pães, ou seja, 24 terços, cada viajante comendo 8 terços. Destes, 15 terços foram dados por Beremiz, que comeu 8, logo contribuiu com 7 terços para a alimentação do cheique. Por sua vez, o seu amigo contribuiu com 3 pães, isto é, 9 terços, dos quais consumiu 8; logo participou apenas com 1 terço para alimentar o cheique. Este é o significado da observação de Beremiz.

No final, porém, o homem que calculava, generosamente ficou com apenas 4 moedas, dando as 4 restantes ao amigo.

O último problema do livro se refere a 5 escravas de um poderoso califa. Três delas têm olhos azuis e nunca falam a verdade. As outras duas tem olhos negros e só dizem a verdade. As escravas se apresentaram com os rostos cobertos por véus e Beremiz foi desafiado a determinar a cor dos olhos de cada uma, tendo o direito a fazer três perguntas, não mais do que uma pergunta a cada escrava. Para facilitar as referências, chamaremos as 5 escravas *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.

Beremiz começou perguntando à escrava A: "Qual a cor dos seus olhos?" Para seu desespero, ela respondeu em chinês, língua que ele não entendia, por isso protestou. Seu protesto não foi aceito, mas ficou decidido que as respostas seguintes seriam em árabe. Em seguida, lê perguntou à B: "Qual foi a resposta que A me deu?" B respondeu: "Que seus olhos eram azuis". Finalmente, Beremiz perguntou à C: "Quais as cores dos olhos de A e B?" A resposta de C foi: "A tem olhos pretos e B tem olhos azuis". Neste ponto, o homem que calculava concluiu. "A tem olhos pretos, B azuis, C pretos, D azuis e E azuis". Acertou e todos ficaram maravilhados.

Explicação para a dedução de Beremiz: Em primeiro lugar, se perguntarmos a qualquer das cinco escravas qual a cor dos seus olhos, sua resposta só poderá ser "negros", tenha ela olhos azuis ou negros, pois na primeira hipótese ela mentirá e na segunda dirá a verdade. Logo, B mentiu e portanto seus olhos são azuis. Como C disse que os olhos de B eram azuis, C falou a verdade, logo seus olhos são negros. Também porque C fala a verdade, os olhos de A são negros. Como somente duas escravas tem olhos negros, segue-se que os olhos de D e E são azuis.

Certamente Malba Tahan escolheu este caso para o fim do livro porque desejava encerrá-lo com chave de ouro, tal a beleza do problema. Podemos, entretanto, fazer três observações que reduzem bastante o brilho desse *gran finale*:

1) O método usado por Beremiz não permite sempre resolver o problema. Ele acertou por mero acaso. Com efeito, se os olhos de A fossem azuis (admitindo ainda que B tenha olhos azuis e C, negros), ele só poderia concluir que, no caso de D e E, uma teria olhos azuis e a outra olhos negros. Mas não poderia dizer qual delas. Mais precisamente: o raciocínio utilizado por Beremiz permite determinar apenas as cores dos olhos de A, B e C . Por exclusão, conclui-se que D e E têm as cores que faltam, mas não se pode especificar a cor de cada uma, quando essas cores forem diferentes.

2) Se Beremiz fosse mais esperto, encontraria um método infalível para determinar a cor dos olhos de cada uma das escravas, *fazendo apenas uma única pergunta*! Bastava chegar junto a uma das escravas (digamos, A) e perguntar: "Qual a cor dos olhos de cada uma de vocês?" Como há 3 escravas de olhos azuis e 2 de olhos negros, só haveria duas respostas possíveis. Se A tivesse olhos negros, sua resposta mencionaria duas escravas de olhos negros três de olhos azuis e seria a resposta certa. Se A tivesse olhos azuis, sua resposta seria três escravas de olhos negros e duas de olhos azuis e, neste caso, bastariam inverter sua resposta para obter a verdade.

3) A solução de Beremiz e aquela dada no item 2 acima, fazem uso de uma informação parentemente essencial: quantas escravas de olhos azuis e quantas de olhos negros existem no grupo. Suponhamos agora que essa in-

formação seja omitida. Têm-se *n* escravas, cujos olhos podem ser azuis ou negros. As primeiras mentem sempre, as últimas nunca. Pode haver de 0 a *n* escravas de olhos azuis; conseqüentemente, o número de escravas de olhos negros também não é fornecido. *Mesmo assim,ainda é possível determinar a cor dos olhos de cada uma por meio de uma única pergunta!* Basta perguntar à escrava *A* o seguinte: "Se meu amigo lhe indagasse qual a cor dos olhos de cada uma das *n*, que lhe responderia você?"

A resposta de *A* para mim consistiria em atribuir a cada escrava uma cor de olhos. Pois bem, seja qual fosse a cor dos olhos de *A*, fosse ela mentirosa ou não, a cor dos olhos de cada escrava seria exatamente aquelas dada por sua resposta a mim.

Com efeito, apenas por uma questão de método, vamos supor que *A* começasse sua resposta pela cor dos seus próprios olhos. Haveria então duas possibilidades quanto ao começo da resposta de *A*.

Primeira: "Eu diria ao seu amigo que meus olhos são negros, que os olhos de *B* são...etc". Neste caso, *A* não me mente, porque ela só poderia dizer ao meu amigo que seus olhos são negros. Logo, seus olhos são mesmo negros e sua resposta contém a verdade.

Segunda: "Eu diria ao seu amigo que meus olhos são azuis, que os de *B* são .... etc". Então *A* é mentirosa, pois ela não poderia dizer a ninguém que seus próprios olhos são azuis. Portanto, *A* mentiria ao meu amigo e me diria ao contrário; logo, me contaria a verdade.

Apesar de ter estragado um pouco da festa de Beremiz com as escravas, espero ter deixado claro que me diverti lendo *O Homem que Calculava*, tanto agora como da primeira vez. A solução explicitada em 2) foi por mim imaginada naquela época, embora as pessoas que me conhecem, ou que sabem a cor dos meus olhos, duvidem muito desta afirmação.

Sobre uma história de Malba Tahan

Jesús A. P. Sánchez

O problema dos 1000 dinares

Talvez muitos não saibam que Malba Tahan, autor do encantador livro *O homem que calculava,* foi o professor de Matemática brasileiro chamado Júlio César de *Mello e Souza* (1895-1974). Além de autor de mais de cem livros de Literatura Oriental, Didática e Matemática, foi um mestre na arte de contar histórias. Neste artigo farei referência a uma delas.

Trata-se do *problema dos mil dinares*, apresentado em seu livro *Novas Lendas Orientais* (Editora Record, 1990). A Beremiz, protagonista de *O homem que calculava,* apresentou-se o seguinte desafio aritmético:

Determinar como 1 000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

a) *A numeração das caixas, de* 1 *até* 10*, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.*

b) *É possível fazer qualquer pagamento, de* 1 *a* 1 000 *dinares, sem precisar abrir as caixas.*

Depois de pensar um pouco, Beremiz apresentou a seguinte solução:

A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de um dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas pois, se tivesse três, quatro ou mais dinares, não seria possível fazer um pagamento de dois dinares.

A caixa número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Beremiz continua o seu raciocínio, até estabelecer a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9.

Caixa e Moeda(s)

Quanto à décima caixa, conclui que deve conter

$$1000 - (2^8 + 2^7 + ... + 2^1 + 2^0) = 489 \text{ moedas}$$

Justificativa da solução, usando notação binária

Uma justificativa da solução de Beremiz pode ser fornecida, utilizando-se a notação binária (base 2) para representar os números.

Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$$352 = 1.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 +1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

Visto que 511 é 111111111 em notação binária, para fazer um pagamento dessa quantia escolhemos todas as caixas, da primeira até a nona.

Para cancelar uma dívida de x dinares, com $551 < x \leq 1000$, escolhemos a caixa número 10 e, para o resto, $x - 489$ tomamos uma ou mais caixas dentre as nove primeiras.

Como curiosidade, observamos que uma dívida estritamente compreendida entre 490 e 512 dinares pode ser paga de duas maneiras, usando ou não a décima caixa. Por exemplo, uma soma de 500 dinares pode ser obtida com as caixas de números 10, 4, 2 e 1, pois $500 = 489 + 1.2^3 + 1.2^1 + 1.2^0$. Mas, também, $500 = 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$, isto é 111110100 na notação binária; logo, poderíamos também utilizar as caixas de números 9, 8, 7, 6, 5 e 3.

A lei de Alcides

Paulo Afonso da Mata Machado

No meu tempo de aluno do Colégio Estadual de Minas Gerais, em Belo Horizonte, havia um inspetor de nome Alcides que tinha como uma de suas funções ir para a sala na qual o professor houvesse faltado e ficar com os alunos durante o horário da aula. Ele cumpria essa função com muito gosto e, geralmente, ia para o quadro-negro, como se estivesse dando aula, e perguntava:

– Como se calcula o quadrado de um número terminado em 5?

Muitos alunos reclamavam:

– Essa não, Alcides, conta outra!

Ele não ligava para os comentários e enunciava a regra:

– Separa-se o último algarismo do número e multiplica-se o número restante por seu sucessor; em seguida, acrescenta-se 25.

E dava o exemplo esclarecedor:

– Seja o número 35; separamos o último algarismo e fica 3; em seguida multiplicamos pelo sucessor, ou seja, 4: 3 vezes quatro é igual a 12. Depois acrescentamos 25. Pronto! O resultado é 1 225.

A lei de Alcides é muito fácil de ser explicada. Qualquer número terminado em 5 pode ser escrito como sendo igual a $10y + 5$, sendo y o número que resta após a retirada do último algarismo. Se elevamos esse número ao quadrado, obtemos

$100y^2 + 100y + 25$ ou $100y(y + 1)$. Está demonstrada a lei de Alcides.

Certo dia, encontrei-me com Alcides dando voltas na Praça da Liberdade e conversamos sobre o colégio no qual estivemos juntos trinta anos atrás. Perguntei a ele:

— Como se calcula o quadrado de um número terminado em 5? Ele foi pronto na resposta, lembrando-se perfeitamente da regra.

Pois bem, meu caro Alcides, a sua lei vai ser útil para que eu resolva o problema: "O número natural $N = 11... 122 ...25$ tem $2n$ algarismos. Os $n - 1$ primeiros são iguais a 1, os n seguintes são iguais a 2 e o último é 5. Mostre que, para $n \geq 2$, N é um quadrado perfeito e determine, em função de n, a raiz quadrada de N".

Se $N = m^2$, então m deve terminar em 5 e pela lei de Alcides o número

$$P = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}\,\underbrace{22\ldots2}_{n-1},$$

que é o N "separado" do 25, deve ser o produto de dois números naturais consecutivos. Temos:

$$\begin{aligned} P &= 1\cdot 10^{2n-3} + \cdots + 1\cdot 10^{n-1} + 2(10^{n-2} + \cdots + 1) \\ &= \frac{(10^{n-1} - 1)(10^{n-1} + 2)}{9} = \frac{10^{n-1} - 1}{3} \times \frac{10^{n-1} + 2}{3}. \end{aligned}$$

Observando que o segundo número desse produto é um inteiro, pois, sendo a soma dos algarismos de $10^{n-1} + 2$ igual a 3, esse é um número divisível por 3. Além disso, como $\dfrac{10^{n-1} + 2}{3} = 1 + \dfrac{10^{n-1} - 1}{3}$, temos $P = k(k + 1)$, sendo k o natural $\dfrac{10^{n-1} - 1}{3}$.

Seja $m = k5$ o número formado pelos algarismos de k seguido de 5.

Então,

$$m = 10 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{3} + 5 = \frac{10^n + 5}{3}, \quad \text{que implica} \quad N = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2.$$

O editor e a média

Luiz Márcio Imenes

Em dezembro do ano passado, um amigo que é editor pediu-me que o ajudasse na solução de um problema. O custo de reimpressão de um livro depende de dois fatores: papel e gráfica. O gasto com papel representa 60% daquele custo e as despesas com gráfica os restantes 40%. Exemplificando: se, na ocasião, a reimpressão de um livro custasse R$ 10.000, então R$ 6.000 seriam devidos ao papel e R$ 4.000 à gráfica. Disse-me ele ainda que, no prazo de um ano, o preço do papel havia subido 25,9% e os custos com gráfica 32,5%. O seu problema era saber de quanto deveria subir o preço do livro.

Este é um exemplo prático, simples e interessante, de aplicação do conceito de média ponderada. Os pesos desta média são as porcentagens com que cada uma das duas componentes, papel e gráfica, pesam no custo de reimpressão do livro. Portanto, o aumento do preço do livro deve ser calculado assim:

$$\frac{60 \times 25{,}9\,\% + 40 \times 32{,}5\,\%}{100} = 28{,}54\,\%$$

Qual é a parte de cada um?

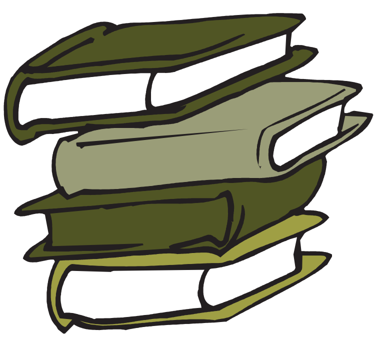
Certa vez, trabalhando numa escola particular de 1º grau (atual ensino fundamental), uma das proprietárias apresentou-me o seguinte problema: quando foi fundada, a escola tinha apenas as quatro primeiras séries do 1º grau (primário). A sociedade fundadora era constituída por três professoras que haviam investido capitais iguais. O ginásio (5ª a 8ª série do atual ensino fundamentel) foi criado mais tarde, sendo que participou da sua fundação, além das três, uma quarta professora. As quatro investiram capitais iguais.

O curso primário funcionava num prédio e o ginásio,em outro, localizado nas proximidades do primeiro. Ambos os prédios eram alugados.

As quatro sócias estavam pretendendo construir um prédio que abrigasse todo o 1º grau. Para isso precisavam investir, em conjunto, uma certa quantia. Qual a parte de cada uma, se elas pretendiam manter suas posições na sociedade?

É claro que as sócias haviam percebido que as três mais antigas estavam em igualdade de condições, mas que a parte da outra deveria ser diferente, e menor do que a delas.

Para resolver o problema vamos indicar por P o valor do primeiro empreendimento, que é o curso primário, e por G o valor do segundo empreendimento, que é o curso ginasial. Portanto, o valor total do empreendimento é $P + G$. As três sócias mais antigas são proprietárias, cada uma de:



$$\frac{1}{3}P + \frac{1}{4}G$$

e a que só é sócia do ginásio é proprietária de: $\frac{1}{4}G$.

Portanto, a sua parte na empresa toda é:

$$\frac{\frac{1}{4}G}{P+G}.$$

Por exemplo: se após uma avaliação se constatasse que

P = R$ 1.000.000,00 e G = R$ 800.000,00,

então a parte da quarta sócia seria:

$$\frac{\frac{1}{4}\times 800.000}{1.000.000 + 800.000} = \frac{1}{9}$$

Neste caso, as três sócias antigas deveriam então entrar, em conjunto, com 8/9 do investimento total, cabendo 8/27 a cada uma.

Como dar descontos

Um aluno que trabalhava no setor de vendas de uma fábrica de calçados, apresentou-me o seguinte problema: a empresa dava aos clientes um desconto de 10% para compras à vista; dava ainda mais 10% de desconto para compras acima de 2.000 e abaixo de 10.000 pares de sapatos ou 15% para compras acima de 10.000 pares.

Sua dúvida era essa: se um cliente comprasse à vista, 12.000 pares, ele deveria dar primeiro 10% de desconto (pela compra à vista) e logo depois 15% (pela compra acima de 10.000 pares) ou poderia dar logo um desconto total de 25%?

Foi desta maneira que ele me colocou o problema, e, por algumas perguntas que lhe fiz, pude perceber que ele tinha a sensação de que não dava na mesma, mas não se sentia seguro quanto a isso.

Convidei-o a analisar a situação. Seja C o valor da compra. Recebendo um desconto de 10% seu cliente pagaria 0,90 C pela mercadoria. Sobre esse valor, sendo dado agora um desconto de 15%, o valor a ser pago passaria a ser $0{,}85 \times 0{,}90\ C = 0{,}765\ C$. Isto significa que o cliente pagaria 76,5% do valor de C, e que equivale a um desconto único de 23,5%.

Portanto, para seu cliente, era mais vantajoso um desconto de 25%!

Restava saber, na hora da decisão, a quem beneficiar: a empresa ou o cliente?

Situações deste tipo, envolvendo porcentagens, aparecem com freqüência. É comum as pessoas somarem porcentagens indevidamente. Na época da inflação acelerada, gastei muito tempo explicando para os alunos e outras pessoas que a inflação do trimestre *não* era a soma das inflações de cada um dos três meses. Assim, por exemplo, se as inflações de janeiro, fevereiro e março fossem, respectivamente, de 12%, 11% e 14% a inflação acumulada do trimestre não seria de 12% + 11% + 14% = 37%.

O cálculo correto deve ser feito assim: se p é o preço de uma mercadoria em fim de dezembro, então, em fim de janeiro ela custa: $1{,}12p$. Em fim de fevereiro: $1{,}11 \times 1{,}12p$ e em fim de março: $1{,}14 \times 1{,}11 \times 1{,}12p \cong 1{,}42p$.

Isto significa um aumento aproximado de 42%.

O conto do desconto

Um colega de trabalho e professor de Química, contou-me que anos atrás, quando a inflação era muito alta, ao comprar pneus novos para seu carro, precisou optar entre dois planos de pagamento:

1) 50% de desconto sobre o preço da tabela, para pagamento à vista;

2) 35% de desconto sobre o preço da tabela, para pagamento em 3 vezes.

O vendedor lhe mostrou a vantagem do segundo plano. Pagando em 3 vezes você está pagando 15% a mais. Em 3 meses, isto dá 5% ao mês, o que, para a época, era de fato um juro baixíssimo.

De imediato, meu colega percebeu que este raciocínio estava errado. Na verdade, o pagamento em 3 vezes, correspondia a um financiamento em 2 meses e não três. Precisamos perceber que uma das parcelas é entrada. Então o juro mensal seria 7,5% e não 5%.

Entretanto, este não é ainda o raciocínio correto. Usando sua calculadora financeira programável, meu colega concluiu que o juro mensal, embutido na segunda proposta de pagamento, era de cerca de 33%!!

Vamos raciocinar. Seja p o preço da tabela do pneu. No primeiro plano de pagamento ele pagaria $0{,}50p$; no segundo, pagaria $0{,}65p$, sendo $\frac{0{,}65\,p}{3}$ de entrada, uma primeira prestação de $\frac{0{,}65\,p}{3}$ e a segunda prestação de $\frac{0{,}65\,p}{3}$.

Após pagar a entrada ele fica devendo para a loja:

$$0{,}50\,p - \frac{0{,}65\,p}{3} = \frac{0{,}85\,p}{3}$$

Este é o valor efetivamente financiado: $\frac{0{,}85\,p}{3}$.

Se a taxa mensal de juros é j, então após um mês sua dívida passa a ser:

$$\frac{0{,}85\,p}{3} + \frac{0{,}85\,p}{3} \cdot j = (1 + j) \cdot \frac{0{,}85\,p}{3}.$$

Aí ele paga a primeira prestação e fica devendo:

$$(1 + j)\frac{0{,}85p}{3} - \frac{0{,}65p}{3}.$$

Após outro mês esta dívida passa a ser: $\left[(1 + j)\frac{0{,}85\,p}{3} - \frac{0{,}65\,p}{3}\right](1 + j)$

Então ele paga a segunda prestação e quita a dívida:

$$\left[(1+j)\frac{0{,}85\,p}{3}-\frac{0{,}65\,p}{3}\right](1+j)-\frac{0{,}65\,p}{3}=0.$$

Simplificando obtemos: $85(1+j)^2-65(1+j)-65=0$

ou seja, $17(1+j)^2-13(1+j)-13=0$.

Resolvendo esta equação do segundo grau, na incógnita $1+j$, e considerando apenas a raiz positiva obtemos:

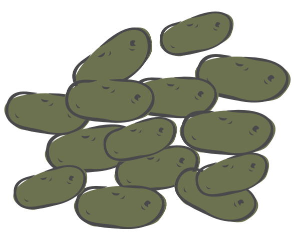
$$1+j\cong 1{,}3368$$

$$\text{donde } j\cong 0{,}3368=33{,}68\%$$

Para fazer justiça àquele comerciante, devo contar ainda que meu colega me disse: na conversa com o dono da loja ele pôde perceber que o mesmo não tinha consciência disto tudo. A defesa que fazia do segundo plano de pagamento, era, até certo ponto, sincera. Achava até que, neste segundo plano, estava perdendo dinheiro, em face de uma inflação muito alta. Sem perceber, ao invés de perder, ganhava, e muito, com ela. É claro que este comentário não se generaliza para todos os especuladores.

Um punhado de Feijões

Abdala Gannam



Para meu colega, Ronald Claver; um poeta dos melhores.

Quando menino, gostava de fazer adivinhações com números. Certa vez, estava eu a me "exibir", num desses armazéns comuns nas pequenas cidades do interior de Minas Gerais. Em meio à minha pequena platéia, estava sentado ao lado de um saco de feijões o dono do armazém, um velhote de setenta anos, aproximadamente, que me observava.

Não me lembro muito bem do que eu estava tentando adivinhar – talvez a idade de alguém, quem sabe –, quando o velhote colocou sobre o balcão um punhado de feijões, interrompendo-me para dizer:

– "Olha seu moço, não sei quantos feijões existem neste punhado".

Dizendo isto, virou-se de costas para o balcão onde estavam os feijões, falando-me:

– "Faça três monte de feijões, de maneira tal que os montes fiquem enfileirados e que em cada um tenha o mesmo número de feijões".

Calmamente assim o fiz, comunicando-lhe o cumprimento da tarefa, no que ele continuou a dizer:

–"Retire dos montes laterais, três feijões e os coloque no monte do meio".

Após alguns segundos respondi:

–"Tudo pronto"!

– "Agora, retire do monte do meio, tantos feijões quantos ficaram em um monte lateral, colocando-os em um qualquer dos montes laterais".

Assim o fiz, o velhote falou:

– "Ficaram 9 feijões no monte do meio".

Contei e recontei os feijões do monte do meio e encontrando realmente nove, fiquei surpreso.

Várias vezes o truque foi repetido, variando os números de feijões que eram retirados dos montes extremos, o que resultava números diferentes no monte do meio.

A partir deste dia, passei algum tempo meditando sobre o que fazia o velhote e como conseguia dizer o número de feijões resultante no monte do meio, sem saber o número inicial de feijões. Depois de muito pensar, de ensaiar e errar, descobri, finalmente, que este número é múltiplo de três (assim, dizer para retirar 3 de cada extremo resultará ao final, 9 no monte do meio). Deste modo, o truque do punhado de feijões passou a integrar o meu repertório de adivinhações, o que me proporcionou muitas exibições.

Não satisfeito com a trivialidade do segredo que permite determinar o número de feijões do monte do meio, pensei na possibilidade de aumentar o número de montes em que os feijões poderiam ser divididos, o que tornaria mais difícil a descoberta do truque. Com este objetivo, fiz a seguinte tradução matemática do problema:

1º) Suponhamos que o punhado de feijões seja dividido em n montes ($n \geq 2$), contendo cada monte x feijões. (*)

2º) Chamemos o primeiro monte de a_1, o segundo de a_2, o terceiro de a_3, e assim por diante.

3º) Retiremos de cada monte (exceto de a_1) y feijões, que são colocados em a_i. Isto nos diz que o número N de feijões em a_1 será:

$$N = x + (n - 1)\ y$$

4º) Retirando de a_i tantos feijões quantos os que ficaram em um qualquer dos outros montes, teremos:

$$N = x + (n - 1)y - (x - y) = ny$$

* O truque pode ser feito também com dois montes, mas isto torna muito fácil sua descoberta.

Conclusão:

O número (N) de feijões contidos no monte a_1 será sempre o produto do número de montes (n) pelo número de feijões (y) que foi retirado de cada um dos outros montes.

Algum tempo depois, voltei ao armazém. Após certificar-me de que tinha uma platéia garantida, chamei o velhote, apanhei um bom punhado de feijões que coloquei sobre o balcão e de costas, disse:

– “Divida este punhado de feijões em tantos montes quantos o senhor queira, desde que sejam no mínimo três, e que estes montes fiquem enfileirados”.

Depois de algum tempo o velhote disse:

– Pronto meu rapaz!

– Quantos montes foram obtidos?

– Sete, ao todo.

– Retire dois feijões de cada monte, colocando-os no quinto monte.

– Pronto.

– Retire do quinto monte tantos feijões quantos os que ficaram no primeiro monte, colocando-os no terceiro monte.

Após a resposta afirmativa do velhote, de que a última tarefa estava concluída, assumi uma aparência de convencimento, dizendo:

– Bem, ficaram seis feijões no quinto monte.

Após contá-los, o velhote disse:

– Não! Ficaram quatorze.

A partir daí, fui alvo de muitas galhofas. Não sei porque me veio à cabeça o número 6, em vez de 14. Talvez tenha sido o fato de muitas vezes ter feito o truque com três montes.

A propósito, esta foi minha última exibição.

Capítulo 2

Números

Fazendo contas sem calculadora

Geraldo Ávila

Introdução

A calculadora de bolso é, hoje em dia, um instrumento de fácil acesso a qualquer pessoa. Já vai longe o tempo em que se discutia se os alunos podem ou não usá-la, pois eles a têm em mãos com a maior facilidade. O importante é saber quando seu uso é recomendado porque ajuda, e quando a calculadora em nada contribui e deve ser evitada. A **RPM** já tratou do uso da calculadora em artigos que contêm informações importantes e pouco divulgadas sobre o quanto pode fazer a "calculadora do feirante".

Como dizem muito bem os autores de um dos artigos, a calculadora deve ser introduzida "quando o aluno estiver dominando completamente os algoritmos das operações...". Isso nos traz à mente certas habilidades de cálculo que não usam a calculadora, mas que, por serem muito importantes, devem ser cultivadas desde os estágios mais elementares do aprendizado. É sobre isso que desejamos falar aqui.

Vamos fazer as contas de cabeça

Isso mesmo, vamos começar com problemas que podemos resolver "na hora", quando estamos no meio de uma conversa e não dispomos de lápis e papel, muito menos de calculadora. É o que se costuma dizer: fazer as contas "de cabeça".

Vamos começar com contas de subtrair, usando a técnica da “translação”. Por exemplo, subtrair 34 de 61 é o mesmo que subtrair 30 de 57 (veja, estamos transladando os dois números para a esquerda de 4 unidades) ou, ainda, o mesmo que subtrair 40 de 67 (agora somamos 6 unidades a ambos os números). Em ambos os casos, é fácil ver que a diferença é 27.

Problema 1

Meu avó nasceu em 1872 *e faleceu em* 1965. *Quantos anos viveu ?*

Por que pegar lápis e papel para fazer a conta? Use a técnica da translação, assim: a diferença entre 1965 e 1872 é a mesma que entre 1963 e 1870. Ora, de 1870 a 1900 são 30 anos; a estes somo os 63 que vão de 1900 a 1963. Meu avô viveu 93 anos.

Posso também raciocinar assim:

$$1965 - 1872 = 165 - 72 = 163 - 70 = 63 + 30 = 93.$$

Outro modo: de 1965 a 1972 (quando meu avô completaria 100 anos de idade) são 7 anos. Então ele viveu 100 – 7 = 93 anos.

Podíamos também ter transladado para a frente, assim (mas tudo de cabeça):

$$(1965 + 8) - (1872 + 8) = 1973 - 1880 = 20 + 73 = 93.$$

Outro modo: de 1872 a 1962 são 90 anos (pois só faltam mais 10 para chegar a 100 anos em 1972); aos 90 acrescento 3 para chegar a 1965, obtendo os 93 anos.

Problema 2

Em 1942 *meu* avô *completou* 70 anos. *Em que* ano ele *nasceu?*

Somo 30 a 1942 e obtenho 1972, quando meu avô completaria 100 anos; logo, ele nasceu em 1872, ou seja, 100 anos antes.

Outro modo: se o ano fosse 1940, eu voltaria 40 anos ao ano de 1900, do qual volto mais 30 e chego a 1870; agora somo os 2 anos que tirei no início e chego ao ano do nascimento de meu avô: 1872.

Alguns desses problemas de calcular a idade de uma pessoa são muito fáceis de resolver, quando os anos de nascimento e morte têm formas bem particulares. Veja, por exemplo, o caso de *Nicolau Copérnico,* que nasceu em 1473 e faleceu em 1543. Aqui é fácil ver que faltam 30 anos para se chegar a 1573, quando Copérnico completaria 100 anos; logo, ele viveu 70 anos, 100 – 30.

Problema 3

Outro dia encontrei-me com um senhor que foi muito amigo de meu pai. Eu lhe perguntei a idade e ele me disse: estou com 83 *anos. Em que ano ele nasceu?*

Vejamos: como estamos em 2005, tenho de subtrair 83 de 2005. Pela técnica de translação, basta subtrair 80 de 2002, o que é fácil fazer de cabeça. O resultado é 1922, ano do nascimento desse amigo de meu pai.

Outro modo: somo 7 a 2005 e vou para 2012, quando ele terá 90 anos; mais 10 e chego a 2022, quando ele terá 100 anos; volto 100 anos a 1922, que é quando ele nasceu.

Problema 4

Lúcia tinha 10 *anos em* 1917. *Qual era sua idade em* 1998*?*

Se em 1917 Lúcia tinha 10 anos, em 1910 ela estava com 3 anos. De 1910 a 1995 são mais 85 anos; portanto, em 1995 ela estava com 85 anos de idade, logo 88 anos em 1998.

De tanto resolver problemas corno esses, o aluno vai, por si mesmo, inventando maneiras próprias de fazer as contas.

Contas de somar

Quando usamos a técnica da translação nas contas de subtrair, temos de aumentar ou diminuir os dois números, simultaneamente, da mesma quantidade. No caso da soma aumentamos um e diminuímos o outro da mesma quantidade. Por exemplo, somar 47 com 39 é o mesmo que somar 46 com 40, ou 50 com 36, resultando em 86. Somar 143 com 234 é o mesmo que somar 140 com 237, que é o mesmo que 40 + 337, que é 377; mas tudo isso de cabeça, nada de lápis e papel.

A resolução mental desses probleminhas é um bom exercício para desenvolver bem a compreensão das operações de soma e subtração. E é coisa que pode ser exercitada durante a aula, num clima agradável e de brincadeira com as crianças, introduzindo questões como estas: “Vai ver que, embora a Luciana seja mais velha que o Francisco, o avô deste pode ter nascido antes do que o avô da

Luciana. Vai ver que o Gabriel nem sabe a idade da avó ou do pai dele! Então terá mais um dever de casa: trazer amanhã as idades de seu pai e de sua avó."

Mas não vá lhes perguntar em que ano nasceram, isso fica para ser resolvido durante a aula...

A importância da tabuada

A calculadora não dispensa uma boa compreensão das operações, nem o aprendizado da tabuada. O aluno precisa aprender a tabuada hoje, tanto quanto no meu tempo de menino, quando não existia calculadora. Qualquer um deve saber responder – e responder rapidamente – a perguntas que me faziam na escola primária (o que hoje são as primeiras 4 séries do ensino fundamental): 7 vezes 8?, 9 vezes 6?, 5 vezes 8?, e assim por diante. É preciso ter cuidado para que o uso da calculadora não deixe de lado o aprendizado da tabuada e uma boa compreensão das operações.

Digo isso porque o aprendizado da tabuada tem sido muito negligenciado ultimamente, depois que surgiu a calculadora. Houve mesmo casos de muitos professores que pensavam (ou ainda pensam?) que agora, com a calculadora, a tabuada perde sua importância. Não é assim. Não é apenas porque alguns de nós somos mais velhos que insistimos no aprendizado da tabuada, mas é porque esse aprendizado continua tão importante hoje como antigamente. Se não, vejamos: você vai à padaria, compra 7 pãezinhos, a R$ 0,12 cada um, e paga com uma moeda de R$1,00; quanto vai receber de troco? Esse é o tipo de situação que qualquer pessoa deve resolver de cabeça; são cálculos triviais. Se alguém me disser que ninguém tem de saber 7 vezes 12 de cabeça, eu respondo: então deve saber que 5 vezes 12 é 60; agora some mais 12, vai para 72; e some outros 12, vai para 84. Pronto, 7 pãezinhos custam 84 centavos; um real menos 84 centavos (que é o mesmo que 96 centavos menos 80 centavos) dá 16 centavos, que é o troco devido. Essa última conta do troco poderia também ser feita assim: de 84 até 90 são 6, ao qual somamos 10 para chegar até 100, ao todo 16 centavos.

Cálculos como esses são necessários na vida de qualquer cidadão, por isso é importante saber a tabuada e saber fazer contas simples como essas, sem recorrer a lápis, papel ou calculadora. E, como já dissemos acima, é um bom exercício para desenvolver bem a compreensão das operações. Eu pergunto: não seria o caso de passar boa parte das aulas fazendo tais exercícios? E depois organizar os alunos em grupos e fazer competições entre os grupos? Seria um modo de tornar a aula descontraída, engraçada e agradável, ao mesmo tempo que se estimularia o interesse dos alunos nesses exercícios de compreensão das operações e de memorização.

Decorar é preciso

As pessoas que consideram desnecessário decorar a tabuada talvez pensem que "decorar", de um modo geral, seja uma atividade menos nobre e sem valor algum. Isso não é verdade. "Decorar" é um importante exercício para a memória. E uma boa memória – privilégio de poucos – é um valioso auxiliar da atividade intelectual. O grande matemático *Leonardo Euler* (1707-1783) tinha excelente memória, a ponto de saber, de cor, dentre outras coisas, toda a Eneida de Virgílio. Em latim! Qualquer cidadão brasileiro sabe (ou deve saber...), de cor, o hino nacional. Convém lembrar que atores de teatro decoram peças inteiras. Sabendo a peça de cor, e não dependendo de alguém (o "ponto") para o auxiliar, o ator fica "dono de si", portanto, mais capaz de fazer uma boa interpretação do personagem que irá representar.

Cálculos aproximados

Voltando a falar de cálculos, é claro que não faz mais sentido, hoje em dia, insistir com os alunos para que aprendam a fazer, manualmente, cálculos como

$$3{,}21897 \times 9{,}38 \text{ ou } 2{,}801799 \div 1{,}98,$$

como era exigido de mim no 4º ano do curso primário(fundamental, atualmente). Mas, embora não tenha de fazer contas como essas, o aluno de hoje deve estar preparado para saber, por um rápido exame, que a primeira dessas contas resulta em aproximadamente $3 \times 10 = 30$, enquanto a segunda se aproxima de $2{,}8 \div 2 = 1{,}4$. Conferindo com a calculadora, vemos que a primeira dá 30,193938 e a segunda, 1,41505.

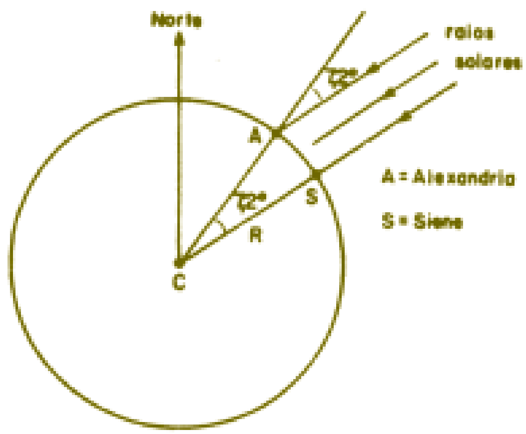
Essa questão do cálculo aproximado é muito importante e deveria merecer a devida atenção nos programas do ensino fundamental e ensino médio.

Outras habilidades de cálculo

Há certas habilidades valiosas e importantes com cálculos, que ilustraremos concretamente em dois problemas, a seguir. O primeiro deles foi, na Antiguidade, um dos grandes sucessos de aplicação da Matemática para a obtenção de um resultado decisivo para o conhecimento humano, qual seja, o tamanho do planeta em que vivemos.

Problema 5

Para calcular a circunferência terrestre, no *século III a.C.* o *sábio Eratóstenes valeu-se da distância conhecida de* 800 *km entre as localidades de Alexandria e Siena, no Egito (A e S, respectivamente, na figura), situadas no mesmo meridiano terrestre. Ele sabia que, quando em Siena os raios solares caíam verticalmente, em Alexandria eles faziam* *um ângulo de 7,2 graus com a vertical. Calcule, com esses dados, a circunferência terrestre, isto é, o comprimento de uma volta completa em torno da Terra.*



Resolução

A principal coisa na resolução desse problema é a proporcionalidade: ângulos centrais estão entre si como os arcos correspondentes determinados na circunferência. Sendo C o comprimento da circunferência, isso significa que

$$\frac{C}{800} = \frac{360}{7{,}2} \quad \text{donde} \quad \frac{800 \times 360}{7{,}2}. \qquad (1)$$

Neste ponto, antes de fazer qualquer conta, devemos notar o que pode ser simplificado: 72 é múltiplo de 36, o que nos permite cancelar o fator 36 em cima e embaixo, assim :

$$\frac{360}{7{,}2} = \frac{36 \times 100}{62} = \frac{100}{2} = 50,$$

portanto, a relação (1) nos dá:

$$C = 800 \times 50 = 40\ 000 \text{ km}.$$

O raciocínio de Eratóstenes ressalta ainda a proporcionalidade de ângulos e arcos, quando vista na sua forma original, assim: se uma volta completa corresponde a 360 graus, que é 50 vezes 7,2 graus, o comprimento dessa volta também será 50 vezes 800 km, isto é, $C = 40\,000$ km.

De posse do conhecimento da circunferência terrestre, o raio da Terra é obtido facilmente, dividindo-se o comprimento encontrado de 40 000 km por $2\pi \approx 6{,}28$, resultando, aproximadamente, 6 370 km.

A aproximação de valores numéricos, como fizemos acima no caso do ângulo (que foi propositadamente ajustado em 7,2 para facilitar os cálculos), é um procedimento que ajuda a obter estimativas rápidas e é freqüentemente usado em cálculo numérico: muitas vezes pequenas mudanças nos dados simplificam consideravelmente os cálculos.

Problema 6

Uma rampa – *como a que dá acesso* ao *Palácio do Planalto, em Brasília – tem* 4 *metros de altura* na sua parte *mais alta. Tendo começado a subi-la, uma pessoa nota que, após caminhar* 12,3 *metros sobre a rampa, está a* 1,5 *metro de altura em relação* ao *solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.*

Resolução

Uma simples figura nos mostra que, sendo x o comprimento total da rampa, vale a proporção:

$$\frac{x}{12{,}3} = \frac{4}{1{,}5}, \quad \text{donde} \quad x = \frac{12{,}3 \times 4}{5}.$$

Novamente aqui, antes de fazer qualquer cálculo, deve-se procurar simplificar: 123 e 15 são ambos divisíveis por 3, depois 40 é divisível por 5. Assim,

$$x = \frac{12{,}3 \times 4}{1{,}5} = \frac{123 \times 4}{15} = \frac{41 \times 4}{5} = \frac{4{,}1 \times 40}{5} = 4{,}1 \times 8 = 32{,}8 \text{ metros.}$$

32,8 m é o comprimento total da rampa; portanto, falta à pessoa caminhar mais $32{,}8 - 12{,}3 = 20{,}5$ metros.

Esse problema da rampa foi proposto em um vestibular da Unicamp. Vários vestibulandos cometeram erros grosseiros de ajuste das casas decimais, encontrando para a rampa comprimento total de 328 metros ou 3,28 metros. Ora, sem fazer qualquer conta pode-se estimar o comprimento da rampa, assim desta forma: a altura total da rampa (4 metros) é pouco mais de 2 vezes a altura de 1,5 metro; logo, o comprimento total da rampa há de ser pouco mais do que o dobro de 12,3 metros, ou seja, pouco mais de 24,6 metros, o que é verdade. Um raciocínio mais preciso seria este: $4 \div 1{,}5$ está entre 2 e 3; logo, o comprimento da rampa está entre $2 \times 12{,}3 = 24{,}6$ e $3 \times 12{,}3 = 36{,}9$, ou seja, por volta de 30 metros.

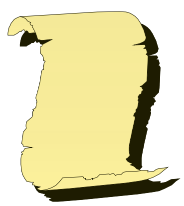
Conclusão

Os exemplos discutidos aqui já são suficientes para mostrar que há muitos cálculos interessantes que o professor pode ensinar a seus alunos. Como se vê, há vários recursos simples que muito facilitam as contas e que vão sendo aprendidos quanto mais o aluno se exercita na resolução numérica dos problemas. Portanto, não é verdade que com o advento da calculadora o professor está agora dispensado de ensinar a fazer contas. Há muito o que ensinar sobre isso, e coisas muito úteis. Se hoje em dia não há por que ocupar os alunos em trabalhosas contas de multiplicar ou dividir, como se fazia antigamente, não só as operações e suas propriedades têm de ser ensinadas, mas as técnicas de cálculo também merecem igual cuidado. Agora, quando lidamos com cálculos complicados, envolvendo raízes quadradas, logaritmos, funções trigonométricas, etc, o uso da calculadora é indispensável e se revela um “alívio” para o usuário.

O *Papiro de Rhind* e as frações unitárias

Arthur C. Almeida

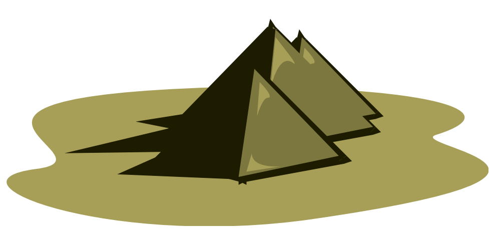
Francisco J.S. de A. Corrêa



Introdução

As origens da Matemática seguramente se perdem nas brumas da aurora da humanidade. O ser humano, desde o mais primitivo, ao abrir os olhos se dá conta das diversas formas espaciais; ao deslocar-se entre duas posições, ele o faz de forma a minimizar o seu esforço, escolhendo a distância mais curta. E, assim, esse nosso ancestral estava desenvolvendo uma forma primitiva de geometria intuitiva. No entanto, a utilização da Matemática de uma forma deliberada talvez tenha sido realizada pela primeira vez associada a processos de contagem que estavam relacionados com problemas práticos.

Nesse sentido, relacionar os elementos de uma determinada coleção ao número de dedos das mãos e dos pés pode ter sido a primeira tentativa de fazer uma contagem. Porém, se o conjunto a ser contado fosse muito grande, esse método tornar-se-ia impraticável. Nesse caso, o homem primitivo poderia valer-se de um conjunto de pedrinhas e colocá-lo em correspondência, por exemplo, com os componentes de um rebanho.



Assim fazia o personagem Polifemo, o gigante de apenas um olho da *Odisséia*, do escritor grego Homero. O gigante, morador da ilha de Cyclops, após ter sido cegado por Ulisses, postava-se todas as manhãs à entrada de uma caverna, tocando cada ovelha que dali saísse, associando-a a uma pedrinha. No final da tarde, cada ovelha que retornasse era novamente relacionada a uma pedrinha do conjunto obtido pela manhã; caso esse último fosse completamente exaurido, o gigante estaria seguro de que seu rebanho teria retornado integralmente à caverna.

Esses processos precisavam ser registrados e, para isso, o homem começou a criar símbolos de modo que os dados coletados não se perdessem. Em princípio, esses registros eram efetivados fazendo-se marcas em bastões ou em pedaços de ossos. Sobre isso transcrevemos abaixo um trecho do livro *Historia da Matemática*, Boyer, C.B.

"Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia, foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás."

Vê-se assim que a pré-história da Matemática recua no tempo para muito antes de Homero, cujas obras datam do século VIII a.C.

Neste artigo faremos uma ligeira incursão em um dos documentos mais antigos da História da Matemática, o *Papiro de Rhind*, ou *de Ahmes*, detendo-nos nas chamadas frações unitárias, para as quais será demonstrado um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma fração da forma $2/p$ possa ser decomposta em uma soma de duas frações unitárias (numerador igual a 1) com denominadores diferentes de p.

As origens egípcias

Inicialmente, faremos algumas conjecturas sobre as origens da Matemática, enquanto atividade intelectual. O historiador Heródoto, assim como outros intelectuais gregos, viajou por vários lugares, entre os quais o Egito, e, sobre um certo rei egípcio de nome Sesóstris, Heródoto nos diz:

Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia.

Platão, em sua obra *Fedro*, também atribui aos egípcios a criação da Matemática. Mais precisamente, é dito:

Na cidade egípcia de Náucratis, existiu um antigo e famoso deus, cujo nome era Thoth; o pássaro chamado íbis lhe era consagrado e ele foi inventor de muitas artes, tais como a aritmética, a arte de calcular, a geometria, a astronomia e os dados, mas sua maior descoberta foi o uso das letras.

Aristóteles, por sua vez, sugere que a Matemática tenha origem egípcia como conseqüência da ascensão de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo suficiente para o estudo, contrastando, assim, com a tese de Heródoto que apontava origens práticas para a Matemática.

Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática matemática se deu antes da civilização egípcia.

O *Papiro de Rhind* ou *de Ahmes*

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagem por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro (30 cm de altura e 5 m de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em Tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico.

Esse documento, que passou a ser chamado *Papiro de Rhind*, foi escrito por volta de 1700 a.C. por um escriba chamado Ahmes, ou Ah-mose (sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*), por solicitação de um certo rei Hyksos, que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 e 1800 a.C. Assim, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4 000 anos, e sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

O *Papiro de Rhind* é uma coleção ou, mais precisamente, um manual, contendo problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica, com instruções para as soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos, coisas só registradas muito tempo depois pelos gregos, a partir de Thales.

Frações unitárias no *Papiro de Rhind*

No *Papiro de Rhind*, entre outros problemas, aparece uma tabela de decomposição de frações do tipo $2/p$ (p, ímpar) em frações unitárias, isto é, frações do tipo $1/x$.

Na primeira parte do *Papiro* há uma tabela contendo as frações 2/3, 2/5, ..., 2/101, representadas como uma soma de frações unitárias. Apresentamos abaixo alguns exemplos:

2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232

2/5 = 1/3 + 1/15

2/11 = 1/6 + 1/66

2/101 = 1/101 +1/202 +1/303 + 1/606

Tais conversões eram necessárias, pois, ao que parece, os egípcios sabiam operar apenas com frações unitárias e usando base decimal. No entanto, não existe nenhuma indicação sobre o processo usado para chegar a essas decomposições. Depois de investigar esse problema em particular, chegamos ao seguinte resultado, que caracteriza tal processo.

Teorema

Seja p um número ímpar maior que 2 e sejam a e b divisores de p, tais que o produto ab divida p.

Então, a fração $2/p$ pode ser decomposta em duas frações unitárias, $1/x$ e $1/y$, ou $2/p = (1/x) + (1/y)$, se, e somente se,

$$x = \frac{p}{a}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ e } y = \frac{p}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Demonstração:

a) Consideremos as frações $1/x$ e $1/y$, onde x e y são dados como no enunciado do teorema. Nesse caso:

$$\frac{1}{\frac{p(a+b)}{2a}} + \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2b}} = \frac{2a}{p(a+b)} + \frac{2b}{p(a+b)} = \frac{2(a+b)}{p(a+b)} = \frac{2}{p}.$$

Devemos observar que, como p é ímpar, seus divisores a e b também são ímpares, logo a soma $(a + b)$ é par, portanto $(a + b)/2$ é um número natural, bem como p/a e p/b , pois a e b são divisores de p.

b) Seja, agora, $2/p = (1/x) + (1/y)$ uma decomposição de $2/p$ em frações unitárias.

Temos então $(x + y)/xy = 2/p$ ou $2xy = p(x + y)$ e, como p é ímpar, concluímos que $(x + y)$ é par, logo existe um k natural tal que $x + y = 2k$ e

$xy = pk$. Tendo a soma e o produto desses dois números, podemos encontrá-los, através da equação do segundo grau $x^2 - 2kx + pk = 0$, cujas raízes são

$$x = k \pm \sqrt{k^2 - pk}\ .$$

Para que essas raízes sejam números naturais, a expressão

$$k^2 + pk = k(k - \ p)$$

deve ser um quadrado de um número natural.

Pode acontecer uma das alternativas:

k e $(k - p)$ são, ambos, quadrados.

Então $k = u^2$ e $k - p = v^2$, e teremos $k - p = u^2 - p = v^2$, de onde $p = u^2 - v^2$ ou $p = (u + v)(u - v)$. Portanto $a = u + v$ e $v = u - v$ são divisores de p, tais que $ab = p$.

Como $u = (a + b)/2$, temos, nesse caso,

$$k = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad p = ab.$$

k não é quadrado e $(k - p)$ não é quadrado.

Dividindo-se k e $(k - p)$ por d = MDC $[k,(k - p)]$, teremos $k = sd$ e $k - p = td$; como $k(k - p) = std^2$ é um quadrado, também o é st; e, como s e t são primos entre si, então $s = k/d$ e $t = (k - p)/d$ também são quadrados. Com isso, recaímos no caso obtendo

$$\frac{k}{d} = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad \frac{p}{d} = ab.$$

Substituindo os valores de k e p na expressão $k \pm \sqrt{k^2 - pk}$, teremos após alguns cálculos e simplificações os valores

$$x = \frac{p}{a}\frac{(a+b)}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{b}\frac{(a+b)}{2}.$$

Corolário

Se p é um número primo, então a decomposição de $2/p$ em duas frações unitárias é única e

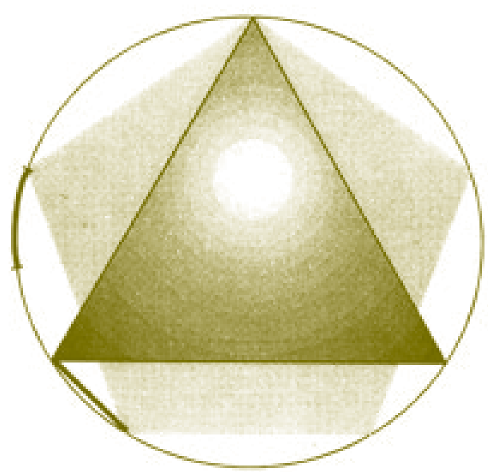
$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p+1)}{2}}.$$

Demonstração

Como p é primo, seus únicos divisores são 1 e p. Portanto, temos $a = 1$ e $b = p$. Substituindo esses valores na forma geral, temos o resultado procurado.

Uma aplicação curiosa e inesperada desse resultado é o que veremos a seguir: uma variante da demonstração dada por Euclides (liv. IV, prop. 16) de que o pentadecágono (polígono de 15 lados) regular inscrito é construtível com régua e compasso.

Euclides constrói o triângulo equilátero inscrito e no mesmo círculo o pentágono regular inscrito, ambos com um vértice comum.



Ora, diz Euclides, o triângulo divide o círculo em terços e o pentágono em quintos; portanto, em cada arco do triângulo devemos ter 5 arcos do pentadecágono e, em cada arco do pentágono, temos 3 do pentadecágono.

Se tomarmos a diferença entre um arco do triângulo e um arco do pentágono, a partir do vértice comum, teremos 2 arcos do pentadecágono.

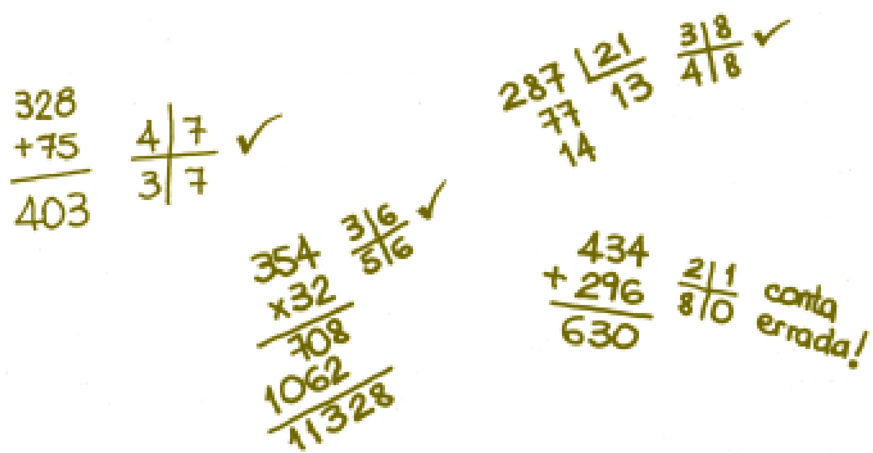
Então, a metade desse arco é o arco do pentadecágono.

Usando o resultado do *Papiro de Rhind*, basta decompor a fração $2/5 = 1/3 + 1/15$ em duas frações unitárias. Daí a medida do arco do pentadecágono, $L/15$, sendo L o comprimento da circunferência, fica $L/15 = 1\ L/5 - L/3$, isto é, o arco do pentadecágono é igual a dois arcos do pentágono menos um arco do triângulo equilátero.

A Prova dos noves

Flávio Wagner Rodrigues

Como e por que funciona (ao menos quase sempre)



Introdução

Meu pai não era matemático e acredito que nem mesmo pudesse ser classificado como um amador. Possuía, no entanto, uma inteligência acima da média e conhecimentos sólidos de Matemática elementar, adquiridos nos tempos em que militou no ensino fundamental. Em função disso, nos meus tempos de escola, ele freqüentemente resolvia junto comigo os problemas da velha *Aríthmética Progressiva* de António Trajano. Sempre que os problemas envolviam contas mais complicadas, ele me recomendava que verificasse o resultado, tirando a *prova dos noves.* Ainda hoje me lembro do dia em que perguntei ao meu pai como e por que a prova funcionava. Meu pai, com a honestidade que sempre caracterizou seu relacionamento comigo, disse:

– Por que funciona eu não sei, mas posso te dizer que, às vezes, ela falha, isto é, ela diz que a conta está certa quando, na realidade, não está.

Essa informação só serviu para aumentar a minha curiosidade, mas somente anos mais tarde consegui formular e responder às perguntas que tinham ficado sem resposta em relação à prova dos noves e que são as seguintes:

1) Por que funciona?

2) Por que prova dos noves e não dos setes, dos onzes ou dos quinzes?

3) Por que, às vezes, ela falha?

São essas as perguntas que tentaremos responder de forma acessível a estudantes do ensino fundamental, começando por definir o que seja "noves fora" e descrever a prova.

O que é o "noves fora" de um número?

"Tirar o noves fora" de um número significa tirar do número o maior múltiplo de 9 nele contido ou, o que é equivalente, achar o resto da divisão do número por 9.

Uma regra prática para achar o "noves fora" de um número é somar seus algarismos e tirar do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido.

Por exemplo:

$$355 \to 3 + 5 + 5 = 13 \to 1 + 3 = 4$$

$$(\text{ou } 13 - 9 = 4)$$

355: "noves fora 4" (e 4 *é* o resto da divisão de 355 por 9)

$426 \to 4 + 2 + 6 = 12 \to 1 + 2 = 3$

$$(\text{ou } 12 - 9 = 3)$$

426: "noves fora 3" (e 3 *é* o resto da divisão de 426 por 9)

$4\,372 \to 4 + 3 + 7 + 2 = ... = 7$

4 372: "noves fora 7" (e 7 *é* o resto da divisão de 4 372 por 9)

Não é uma simples coincidência a relação entre a soma dos algarismos de um número e o resto de sua divisão por 9, pois um número n e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. Vamos ilustrar esse fato com o número 355.

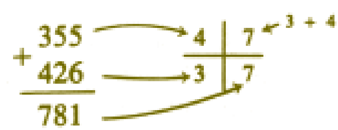
$$355 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 5 = 3 + 5 + + 5 + 3 \times (10^2 - 1) + 5 \times (10 - 1) =$$
$$= 13 + 3 \times 99 + 5 \times 9$$

Como 9 e 99 são múltiplos de 9, segue-se que 355 e a soma de seus algarismos, 13, ao serem divididos por 9, deixam o mesmo resto. O argumento vale para um número n qualquer, uma vez que, para todo $i \geq 1$, $10^i - 1$ é múltiplo de 9. Portanto, ao somarmos os algarismos de um número n, jogando os "noves fora" estamos de fato determinando o resto da divisão de n por 9.

A prova dos "noves fora"

Como funciona?

No caso da adição:



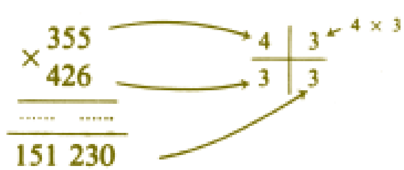
355, "noves fora" 4

426, "noves fora" 3

(se o "noves fora" de 4 + 3 e o de 781 forem iguais, a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves)

4 + 3 = 7, noves fora 7; 781, noves fora 7. *Aprovado.*

No caso da multiplicação:



355, "noves fora" 4

426, "noves fora" 3

(se o "noves fora" de 4 × 3 e o de 151 230 forem iguais, a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves)

4 × 3 =12, "noves fora" 3; 151 230, "noves fora" 3. *Aprovado.*

Por que funciona?

Vamos justificar a prova no caso da multiplicação e o leitor se convencerá que um argumento análogo vale para a adição.

Sejam dados dois números n_1 e n_2, que divididos por 9 deixam restos, respectivamente, iguais a r_1 e r_2. Nessas condições, podemos escrever:

$$n_1 = 9q_1 + r_1; \quad n_2 = 9q_2 + r_2$$

Segue-se, portanto, que:

$$n_1n_2 = 81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2r_1 + r_1r_2 = 9Q + r_1r_2$$

A última igualdade nos permite concluir que n_1n_2 e r_1r_2, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves fica, dessa maneira, completamente explicado. O que ela faz é substituir a operação $n_1 \times n_2$ por $r_1 \times r_2$, e verificar se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações está errada. Dada a simplicidade da determinação de r_1 e r_2 e do produto $r_1 \times r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

Por que a prova dos noves?

Não há nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinzes. A dificuldade é essencialmente de ordem prática, pois o resto da divisão de um número por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9.

Resumindo, usamos a prova dos noves porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e para todo $i \geq 1$, 10^i, dividido por 9 deixa o resto 1. Se a base do nosso sistema fosse, por exemplo, 12, nós provavelmente estaríamos aqui discutindo a prova dos onzes e não dos noves.

Por que, às vezes, ela falha?

Em primeiro lugar vamos observar que se uma conta estiver certa e a prova dos noves for executada corretamente, ela irá sempre confirmar a exatidão da resposta. A possibilidade de falha ocorre quando a conta está errada e a prova não é capaz de detectar o erro. Da discussão feita acima, segue-se facilmente que isso irá ocorrer se e somente se o resultado obtido e o resultado correto diferem por um múltiplo inteiro de 9. De fato, se a resposta dada para a multiplicação 355×426 fosse 151 140, o nosso erro não seria detectado pela prova dos noves.

O leitor mais atento observará também que uma inversão na ordem dos algarismos do resultado não será detectada pela prova, uma vez que a ordem das parcelas não altera a soma. De fato, a prova dos noves não saberá distinguir 115 320 do resultado correto, 151 230, da operação 355 × 426. Observe, no entanto, que essa não é uma situação nova, pois 151 230 – 115 320 = 35 910, que é um múltiplo inteiro de 9.

Comentários finais

Na era do computador e das minicalculadoras, uma discussão sobre a prova dos noves pode parecer anacrônica e inútil. De fato, as gerações futuras dificilmente irão utilizá-las no seu dia-a-dia. No entanto, acreditamos que continuaremos sempre a ensinar operações aritméticas sem o uso de máquinas e o assunto "prova dos noves" pode servir para motivar o estudo de sistemas de numeração.

Vamos concluir com duas perguntas, uma de rotina e outra para estimular a imaginação de seus alunos:

1) Como tirar a "prova dos noves" numa divisão? (aproveite a oportunidade para recordar:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \Longleftrightarrow a = bq + r)$$

2) Num país que usa a base 10 no seu sistema de numeração, mas no qual o 9 é um número sagrado e a sua utilização para fins profanos é terminantemente proibida, do ponto de vista prático, qual seria a melhor escolha para substituir a prova dos noves fora?

Ano Bissexto

Vincenzo Bongiovanni

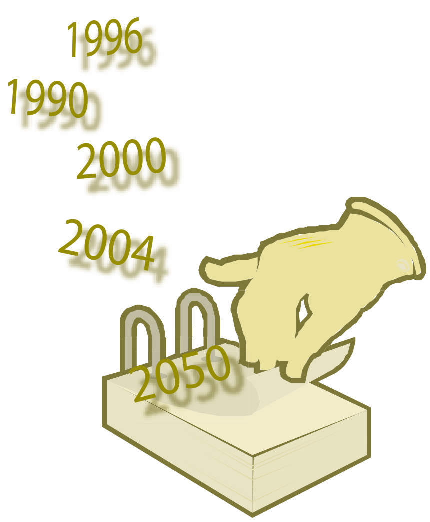
Em nosso calendário, os anos têm 365 dias e os chamados anos bissextos têm um dia a mais. Atualmente, são anos bissextos aqueles indicados por um número *divisível por* 4 *que* não termine em 00 *ou, se termin*ar em 00, que seja *divisível* por 400.

Mas ... de onde veio essa regra?

Achei a resposta no excelente livro de Roberto Boczko, *Conceitos de Astronomia*, Editora Edgard Blücher**,** da qual faço aqui um resumo.

Em épocas remotas, o ano tinha 365 dias. Com o passar do tempo, entretanto, percebeu-se que as estações aconteciam em datas diferentes de ano para ano. Isto significava que o tempo para a Terra completar uma volta em torno do Sol não era de 365 dias e a defasagem estava se acumulando.

Para corrigir isso, um astrônomo, no ano 238 a.C, sugeriu o acréscimo de 1 dia no calendário a cada 4 anos. Sua sugestão não foi aceita.



No ano 46 a.C, Júlio César, sob a orientação do astrônomo Sosígenes, resolveu fazer esse acréscimo: o ano 46 a.C. teve 80 dias a mais, para corrigir os desvios acumulados e o ano 45 a.C. foi bissexto, isto é, teve 366 dias. Mas só a partir do ano 8 da era cristã é que as intercalações desse dia a mais passaram a ser feitas rigorosamente de 4 em 4 anos.

O ano Juliano considerava, então, que uma volta da Terra em torno do Sol levasse 365 dias + 1/4 (= 365,25).

Com o passar do tempo, entretanto, voltaram a surgir defasagens, com certas implicações nos ritos religiosos. Os astrônomos, melhorando seus conhecimentos e seus instrumentos, concluíram que a volta da Terra em torno do Sol durava 365,2425 dias.

Em vista disso, em 1582, o papa Gregório XIII propôs uma reforma no calendário Juliano. Sendo

$$365{,}2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$

a correção deveria, ser de 1 dia a mais a cada 4 anos, menos 1 a cada 100 e mais 1 a cada 400.

Daí a regra válida atualmente.

Para corrigir discrepâncias que já ocorriam, foram descontados 10 dias no mês de outubro de 1582. O ano de 365,2425 dias passou a ser chamado ano Gregoriano.

Acontece que a precisão dos instrumentos continua a ser aperfeiçoada e hoje se calcula o período em que a Terra dá uma volta ao redor do Sol como sendo aproximadamente igual a 365,242199 dias.

$$365{,}242199 \approx 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3300}$$

Isso quer dizer que a regra atual vai merecer uma correção com a retirada de 1 dia do calendário a cada 3 300 anos a contar de 1582. E isto deverá acontecer pela primeira vez em 4882.

Conceitos e controvérsias

Elon Lages Lima

Minha intenção aqui é a de apresentar opiniões e esclarecimentos sobre pontos controvertidos, duvidas, dificuldades e questões em geral que preocupem o professor de Matemática. Os assuntos de que tratarei, gostaria que fossem sugeridos pelo leitor, motivados por seu desejo de aprimorar-se, provocados por sua curiosidade, suscitados às vezes por sua perplexidade diante de opiniões divergentes. Prefiro e darei sempre prioridade a questões relativas à Matemática propriamente dita, embora possa eventualmente discutir problemas correlatos, como os didáticos, por exemplo.

Vamos começar com algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em ensinar Matemática.

Zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto N dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de convivência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in N$ ou $0 \notin N$ como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $N = \{0, 1, 2, ...\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $N = \{1, 2, 3, ...\}$

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um numero natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em N, não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito freqüentemente como índices de termos numa seqüência. Uma seqüência (digamos, de números reais) é uma função x: $N \to$ R, cujo domínio é o conjunto N dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação x_n (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da seqüência. A notação $(x_1, x, \ldots x_n, \ldots)$ é usada para representar a seqüência. Aqui, o primeiro termo da seqüência é x_1, o segundo é x_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ então a seqüência seria $(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, na qual o primeiro termo é x_0, o segundo é x_1, etc. Em geral, x_n não seria o n-ésimo e sim o $(n + 1)$-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma idéia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real"; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de "monstros".

Por que (–1)(–1) = 1?

Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial (atual ensino fundamental), as "regras de sinal" para a multiplicação de números relativos, da seguinte maneira:

1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, (+)(+) = +;

2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, (+)(–) = –;

3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, (–)(+) = –;

e, finalmente,

4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa (–)(–) = +.

Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).

Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por -1 significa "trocar o sinal" e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mais geralmente, multiplicar por $-a$ quer dizer multiplicar por $(-1)\ a$, ou seja, primeiro por a e depois por -1, logo multiplicar por $-\ a$ é o mesmo que multiplicar por a e depois trocar o sinal. Daí resulta que $(-a)(-b) = ab$.

Tudo isto está muito claro e as manipulações com números relativos, a partir daí, se desenvolvem sem maiores novidades. Mas, nas cabeças das pessoas mais inquiridoras, resta uma sensação de "magister dixit", de regra outorgada pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível *demonstrar,* em vez de impor, que $(-1)(-1) = 1$?

Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos como conhecidos. Esta é a natureza da Matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo "se isto, então aquilo". Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, provamos aquilo como conseqüência. Feitas estas observações filosóficas, voltemos ao nosso caso. Gostaríamos de provar que $(-1)(\ -1) = 1$. Que fatos devemos admitir como verdadeiros para demonstrar, a partir deles, esta igualdade?

De modo sucinto, podemos dizer que $(-1)(-1) = 1$ é uma conseqüência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme mostraremos a seguir.

Nossa discussão tem lugar no conjunto Z dos números inteiros (relativos), onde cada elemento a possui um simétrico (ou inverso aditivo) $-\ a$, o qual cumpre a condição $-\ a + a = a + (-a) = 0$. Daí resulta que simétrico $-\ a$, é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se $b + x = 0$, então $x = -b$, como se vê somando $-\ b$ a ambos os membros. Em particular, como $-\ a + a = 0$, concluímos que $a = -(-a)$, ou seja, que o simétrico de $-a$ é a.

Uma primeira conseqüência da distributividade da multiplicação é o fato de que a.0 = 0, seja qual for o número a.

Com efeito, $a + a.0 = a\ .1 + a.0 = a\ (1 + 0) = a.1 = a = a + 0.$

Assim, $a + a.0 = a + 0$, logo $a\ .0 = 0$.

Agora podemos mostrar que $(-1).a = -a$ para todo número a.

Com efeito, $a + (-1).\ A = 1.a + (-1)a = [1+ (-1)].a = 0.a = 0.$

Logo, $(-1).a$ é o simétrico de a, ou seja, $(-1)a = -a$.

Em particular, $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.

Daí resulta, em geral que $(-a)(-b) = ab$,

pois $(-a).(-b) = (-1)a.(-1)b = (-1)(-1)ab = ab$.

Qual o valor de 0^0?

A resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria: 0^0 é uma expressão indeterminada.

Para explicar estas respostas, talvez seja melhor examinar dois exemplos mais simples de fórmulas desprovidas de significado matemático, que são

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{1}{0} .$$

De acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = bc$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$ e $\frac{1}{0} = y$,

estas igualdades significariam que $0 = 0.x$ e $1 = 0.y$. Ora, TODO número x é tal que $0.x = 0$ e NENHUM número y é tal que $0.\ y = 1$. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada" e que $\frac{1}{0}$ é uma "divisão impossível". (Mais geralmente, toda divisão do tipo $\frac{a}{0}$ com $a \neq 0$ é impossível.)

Voltando ao símbolo 0^0, lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ,$$

que é evidente quando $m > n$, continue ainda válida para $m = n$. Pondo $a^m = b$, teremos então

$$\frac{b}{b} = b^0 ,$$

logo $b^0 = 1$ se $b \neq 0$. No caso $b = 0$, a igualdade $\frac{b}{b} = b^0$

tomaria a forma

$$\frac{0}{0} = 0^0 ,$$

o que leva a considerar 0^0 como uma expressão indeterminada. Esta conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como $0^y = 0$ para todo $y \neq 0$, seria natural pôr $0^0 = 0$; por outro lado, como $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$ seria também natural por $0^0 = 1$. Logo, o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual

$$\frac{0}{0}$$

e 0^0, (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas.

Nosso quarto tópico é uma pergunta enviada por uma professora de Piraju, SP. Podemos resumi-la assim:

Qual a diferença entre círculo e circunferência?

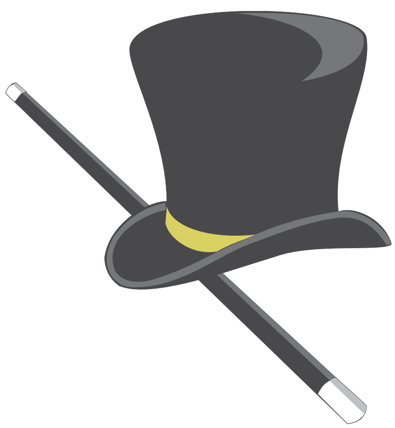
Explica a professora que os guias curriculares para as matérias do ensino fundamental orientam os professores a não fazer distinção entre circunferência e círculo, alegando que não há tal diferenciação no caso de polígonos (fala-se tanto no *perímetro* como na área de um polígono). Mas todos os livros de ensino médio que a professora já viu fazem a distinção: circunferência é a linha, círculo é a região limitada pela circunferência. Daí sua perplexidade.

No meu caso pessoal, ocorreu o oposto, ou quase. No ensino fundamental e no ensino médio me ensinaram a distinguir entre circunferência e círculo. Na universidade, e em livros estrangeiros mais avançados, essa diferença desapareceu. Para ser mais exato, o que desapareceu quase inteiramente foi a palavra "circunferência". Quanto ao termo "círculo" ele tornou-se ambíguo (como "polígono"); ora quer dizer a curva, ora a região por ela limitada.

Para livrar-se da ambigüidade, quando necessário, costuma-se usar a palavras "disco" para significar a região do plano limitada por uma circunferência . Aí não resta dúvidas.

Fazendo mágica com a Matemática

Oscar Guelli



Às vezes me vêm à lembrança os tempos de escola. Quem é que não teve um colega de classe como o Alberto?

Primeiro aluno da turma, Alberto sempre se adiantava para responder às perguntas dos professores. E era incrível: suas respostas eram sempre certas e precisas!

Alberto era brilhante em Matemática. Por isso, naquela manhã quando o professor Aldo chamou Alberto à lousa, dizendo que iria fazer uma mágica de Matemática, a agitação tomou conta da classe.

– Alberto, escolha um número de dois algarismos.

– 36.

– Multiplique este número por 15.

$$36 \times 15 = 540$$

– Agora multiplique o resultado por 7.

$$540 \times 7 = 3780$$

– Subtraia deste resultado o quádruplo do número escolhido.

$$3780 - (4 \times 36) = 3780 - 144 = 3636$$

– Veja o resultado, Alberto. Você repetiu o 36.

Alberto começava a ficar interessado.

0 professor Aldo pediu-lhe, então, que escolhesse outro número de dois algarismos.

– 45.

– Multiplique este número por 15.

$$45 \times 15 = 675$$

– Agora multiplique o resultado por 7.

$$675 \times 7 = 4725$$

– Diminua do resultado o quádruplo do número.

$$4725 - (4 \times 45) = 4725 - 180 = 4545$$

A classe estava eufórica. Alberto observava com atenção os cálculos. Estava prestes a descobrir o truque.

Mas o professor Aldo não lhe deu tempo. E dessa vez mudou os números.

– Escolha outro número de dois algarismos, Alberto.

– 63.

– Multiplique este número por 13.

Alberto ficou surpreso. Já não era mais para multiplicar por 15. Com certeza a troca do número 15 pelo número 13 impediu que naquele instante Alberto descobrisse o truque.

$$63 \times 13 = 819$$

– Agora multiplique o resultado por 8.

$$819 \times 8 = 6552$$

– Diminua do resultado o triplo do número.

$$6552 - (3 \times 63) = 6552 - 189 = 6363$$

Grande professor Aldo! Foi realmente uma mágica brilhante!

A explicação é bem simples. Observe estes dois quadros:

O prof. Aldo diz	Alberto calcula	O prof. Aldo diz	Alberto calcula
Escolha um número de dois algarismos	x	Escolha um número de dois algarismos	x
Multiplique o número por 15	$15x$	Multiplique o número por 13	$13x$
Multiplique o resultado por 7	$7(15x) = 105x$	Multiplique o resultado por 8	$8(13x) = 104x$
Diminua do resultado o quádruplo do número original.	105x 4x = l0lx	Diminua do resultado o triplo do número original.	104x – 3x = l0lx

De uma forma ou outra, o professor Aldo fazia Alberto multiplicar o número escolhido sempre por 101. Veja o que acontece quando multiplicamos qualquer número de dois algarismos por 101:

$$45 \times 101 = 45 \times (100 + 1) = 45 \times 100 + 45 \times 1 = 4500 + 45 = 4545$$

$$72 \text{ x } 101 = 72 \text{ x } (100 + 1) = 72 \times 100 + 72 \times 1 = 7200 + 72 = 7272$$

No dia seguinte Alberto procurou o professor Aldo pelo colégio inteiro. Queria a todo custo contar-lhe que havia descoberto o truque. Tentou várias vezes nos explicar como havia conseguido. Foi inútil. Para nós era uma mágica, e pronto!

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ A fórmula é de BHASKARA ?

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado pois:

Problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Bhaskara que nasceu na índia em 1114 e viveu até cerca de 1185, foi um dos mais importantes matemáticos do século 12. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são *Lilavati* ("bela") e *Vijaganita* ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receitas em prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

Até o fim do século 16 não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo – embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara* –, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Um método para o cálculo do MDC e do MMC

Roberto Ribeiro Paterlini

Introdução

Antes de apresentarmos um novo método para o cálculo do MDC e do MMC de dois números, vamos recordar algumas definições: dados os números naturais a e b, seu MDC (= *máximo divisor comum)* é, como o próprio nome indica, o maior dos números que dividem tanto a quanto b. Enquanto seu MMC (= *mínimo múltiplo comum)* é o menor dentre todos os números positivos que sejam, simultaneamente, múltiplos de a e de b. O número 1 é divisor de qualquer número e, se os números a e b não admitem outro divisor comum, tem-se que MDC $(a, b) = 1$ e diz-se, então, que a e b são *primos entre si.*

O MDC e o MMC aparecem em vários resultados teóricos e na resolução de problemas, mas, nos nossos cursos, sua mais comum aplicação é no cálculo com frações ordinárias. Embora nesse contexto sua utilização seja dispensável –, ao preço de trabalharmos, às vezes, com números maiores –, é na hora de simplificar frações que os textos didáticos usam o MDC e é na hora de comparar, somar ou subtrair frações, que aparece o MMC.

Cálculo de MDC e de MMC

Se os números a e b estão decompostos em fatores primos, é fácil encontrar a decomposição em fatores primos de seu MDC e seu MMC. Como exemplo, consideremos os números 2 100 e 198. Ora, como

$$2\,100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \text{ e } \ 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11,$$

qualquer divisor comum a 2 100 e 198 só pode ter 2 e 3 como fatores primos e somente com expoentes 0 ou 1. O maior de todos será, então, 2×3, isto é

$$\text{MDC } (2\,100, 198) = 2 \times 3 = 6.$$

Daí, a regra já conhecida: o MDC é o produto dos fatores primos que aparecem tanto na decomposição de *a* quanto na de *b*, cada um deles elevado ao *menor* dos dois expoentes com que aí aparece.

Analogamente, qualquer múltiplo comum a 2 100 e 198 deve ter como fatores primos: 2 (com expoente ≥ 2), 3 (com expoente ente ≥ 2), 5 (com expoente ente ≥ 2), 7 (com expoente ≥ 1) e 11 (com expoente ≥ 1) . Logo, o menor deles deve ser $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$, isto é, MMC (2 100, 198) = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69\,300$.

Daí, a regra: o MMC é o produto de todos os fatores primos que aparecem na decomposição de *a* ou na de *b,* cada um deles elevado ao *maior* expoente com que aparece.

O método mais conhecido para o cálculo do MMC de dois ou mais números naturais utiliza a decomposição simultânea em números primos. O método é, geralmente, implementado mediante a disposição exemplificada ao lado. E daí, novamente, tem-se

2 100	198	2
1 050	99	2
525	99	3
175	33	3
175	11	5
35	11	5
7	11	7
1	11	11
1	1	

$$\text{MMC } (2\,100, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69\,300.$$

O outro método

Uma variação deste método simplifica os cálculos e fornece, ao mesmo tempo, o MMC e o MDC dos números. Exemplificamos, calculando o MMC e o MDC dos mesmos números 2 100 e 198:

2 100	198	2
1 050	99	3
350	33	

Tem-se MDC (2 100, 198) = $2 \times 3 = 6$ e

MMC (2 100, 198) = $6 \times 350 \times 33 = 69\ 300$.

Descrição do novo método

Nesta disposição, um número primo comparece na coluna da direita apenas quando divide *ambos* os números à sua esquerda, na mesma linha. As divisões terminam quando isto não mais for possível, o que significa que encontramos dois números primos entre si nas duas colunas da esquerda.

O MDC é o produto dos primos que estão na coluna da direita, e o MMC, o produto deste mdc pelo dos números primos entre si, que restaram na última linha à esquerda.

Justificativa do novo método

Colocando na coluna da direita só os primos que dividem ambos os números da esquerda, estamos, certamente, relacionando fatores primos do MDC. Levando o processo até chegarmos a 2 números primos entre si (que não admitem mais nenhum divisor comum a não ser o 1), teremos esgotado os fatores primos do MDC. Assim, o produto $2 \times 3 = 6$ dos primos da coluna da direita é o MDC dos números dados inicialmente.

Por outro lado, devido à maneira como se chegou aos números primos entre si, 350 e 33, tem-se que $2\ 100 = 6 \times 350$ e $198 = 6 \times 33$. Então, qualquer múltiplo de 2 100 deve conter os fatores 6 e 350, e qualquer múltiplo de 198 deve conter os fatores 6 e 33; logo, o menor de todos os múltiplos comuns é aquele que se obtém do produto dos fatores 6, 350 e 33. (O leitor observa que é, nesse ponto, que entra o fato de 350 e 33 serem primos entre si, pois se houvesse, ainda, um número diferente de 1, dividindo 6, 350 e 33, então o produto dos três não seria o menor dos múltiplos comuns.)

Observações

1. Os argumentos acima, para justificar o método, no caso particular estudado do cálculo do MDC e do MMC de 2 100 e 198, se transportam ao caso geral de dois números quaisquer a e b, sem mudanças significativas, mas sob uma notação muito carregada, a partir da decomposição em fatores primos de a e de b.

   Por isso, deixamos de apresentá-la aqui.

2. Este método se aplica, também, ao cálculo do MDC e do MMC de mais do que dois números. Deixamos ao leitor a tarefa de fazer as devidas (e poucas) adaptações nos argumentos apresentados.

3. A justificativa exposta acima põe à mostra uma relação importante entre o MDC, o MMC e o produto de dois números. Com efeito, revendo o processo apresentado, o leitor deduzirá que

   $a \times b = \text{MMC}\ (a,\ b) \times \text{MDC}\ (a,\ b)$,

ou, na forma como é mais utilizada,

$$MMC\ \ (a,b) = \frac{a \times b}{MDC\ \ (a,b)}.$$

Uma disposição simplificada do novo método

Uma outra disposição de utilização desse mesmo processo é a seguinte: forma-se uma fração com os dois números dos quais se pretende calcular o MDC e o MMC. Vai-se simplificando a fração (por divisão pelos fatores primos comuns, de preferência na ordem, para que não se deixe escapar algum) até chegarmos a uma fração irredutível (isto é, com numerador e denominador primos entre si), tendo o cuidado de, a cada passo, anotar (por exemplo, abaixo do sinal de =) o número pelo qual foram divididos os termos da fração. No final do processo, o MDC é o produto dos números anotados abaixo do sinal de = , e o MMC é o produto deste MDC pelo numerador e pelo denominador da fração irredutível. Ou seja,

$$\frac{2100}{198} \underset{2}{=} \frac{1050}{99} \underset{3}{=} \frac{350}{33}$$

donde MDC (2 100, 198) = 2 × 3 = 6

e MMC (2 100, 198) = 6 × 33 × 350 = 69 300.

É claro que o processo acima se torna redundante se estamos procurando o MDC entre numerador e denominador de uma fração para efeito de simplificá-la. Isto só reforça, entretanto, a idéia de que não é nesse contexto que o MDC apresenta sua força como ferramenta matemática.

Outros Critérios de Divisibilidade

Mário Gustavo Pinto Guedes

O objetivo principal de escrever e enviar este trabalho foi o de oferecer alguns “critérios” de divisibilidade fáceis, porém não mnemônicos. Acompanha o trabalho uma tabela que permitirá a qualquer aluno verificar, com facilidade, se um dado número é, ou não, divisível por um dado número primo (entre 7 e 100).

Concordo com os professores quando afirmam que *um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão;* portanto, fica a critério de cada um dos colegas aplicar esta sugestão em suas escolas.

Nº primo	Forma aditiva	Forma subtrativa	Nº primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
7	$a + 5b$	$a - 2b$	47	$a + 80b$*	$a - 14b$
11	$a + 10b$	$a - b$	53	$a + 16b$	$a - 90b$*
13	$a + 4b$	$a -$ [illegible]b	59	$a + 6b$	$a - 53b$
17	$a + 12b$	$a - 5b$	61	$a + 55b$	$a - 6b$
19	$a + 2b$	$a - 17b$	67	$a + 47b$	$a - 20b$
23	$a + 7b$	$a - 16b$	71	$a + 64b$	$a - 7b$
29	$a + 3b$	$a - 26b$	73	$a + 22b$	$a - 51b$
31	$a + 90b$*	$a - 3b$	79	$a + 8b$	$a - 71b$
37	$a + 26b$	$a - 11b$	83	$a + 25b$	$a - 58b$
41	$a + 37b$	$a - 4b$	89	$a + 9b$	$a - 80b$
43	$a + 13b$	$a - 30b$	97	$a + 68b$	$a - 29b$

*90, 80 e 90 foram colocados na tabela no lugar dos números menores 28, 33, 37, respectivamente, porque dão maior agilidade ao processo.

As regras

Dado um número n, seja b seu algarismo das unidades e a o número formado pelos demais algarismos. Por exemplo, se $n = 33684$, $a = 3368$ e $b = 4$.

Então n será divisível por 7 se, e só se, $a + 5b$ for divisível por 7.

A tabela anterior permite reformular esta regra para obter critérios de divisibilidade pelos números primos entre 7 e 100. Ela permite, ainda, o uso de dois "métodos" que chamei de *aditivo* e *subtrativo*.

Exemplos

Divisibilidade por 7

Ex.: 33684

Na tabela: forma aditiva ($a + 5b$), começando com $b = 4$ e $a = 3368$,

$$\begin{array}{r} 3368 \rightarrow 4 \\ +20 \leftarrow 4 \times 5 \\ \hline 3388 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 338 \rightarrow 8 \\ +40 \leftarrow 8 \times 5 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \rightarrow 8 \\ +40 \leftarrow 8 \times 5 \\ \hline 77 \end{array}$$

77 é múltiplo de 7, logo 33684 também o é, assim como 378 e 3388.

Para tornar ainda mais prático o procedimento, faremos os cálculos em seqüência, separando mentalmente a ordem das unidades. Ilustraremos também a "forma subtrativa" ($a - 2b$), com o mesmo número 33684:

Forma aditiva: $a + 5b$

$$\begin{array}{r} 3368\ (4) \\ +20 \\ \hline 338(8) \\ +40 \\ \hline 37(8) \\ +40 \\ \hline 77 \rightarrow 77 \text{ é divisível por } 7 \end{array}$$

Forma subtrativa: $a - 2b$

$$\begin{array}{r} 3368\ (4) \\ -8 \\ \hline 336(0) \\ -0 \\ \hline 33(6) \\ -12 \\ \hline 2(1) \\ -2 \\ \hline 0 \rightarrow \text{ é divisível por } 7 \end{array}$$

Ao apresentar as duas formas aos meus alunos, deixo à escolha a que lhes for mais conveniente. Porém a “forma subtrativa” tem como grande inconveniente o fato de que o aluno já deve estar familiarizado com operações no conjunto **Z**. Aqui no Rio de Janeiro, os critérios de divisibilidade são ensinados na 5ª série, e operações com número inteiros, na 6ª série, o que não ocorre na Proposta Curricular de São Paulo. Sigamos:

Divisibilidade por 11

Ex.: 3872

Forma aditiva: $(a + 10b)$

$$\begin{array}{r} 387(2) \\ +20 \\ \hline 40(7) \\ +70 \\ \hline 11(0) \\ +0 \\ \hline 11 \end{array}$$

Forma subtrativa: $(a - b)$

$$\begin{array}{r} 387(2) \\ -2 \\ \hline 38(5) \\ -3 \\ \hline 3(3) \\ -3 \\ \hline 0 \end{array}$$

3872 é divisível por 11.

Divisibilidade por 13

Ex.: 28574 Forma aditiva:

Forma aditiva: $(a + 4b)$

$$\begin{array}{r} 2857(4) \\ +16 \\ \hline 287(3) \\ +12 \\ \hline 29(9) \\ +36 \\ \hline 6(5) \\ +20 \\ \hline 26 \end{array}$$

26 (múltiplo de 13)

Forma subtrativa: $(a - 9b)$

$$\begin{array}{r} 2857(4) \\ -36 \\ \hline 282(1) \\ -9 \\ \hline 27(3) \\ -27 \\ \hline 0 \end{array}$$

28574 é divisível por 13.

Não pretendendo alongar-me em exemplos, darei mais dois critérios para 17 e para 19:

Para 17: forma ($a - 5b$)

$$\begin{array}{r} 1419(5) \\ -25 \\ \hline 139(4) \\ -20 \\ \hline 11(9) \\ -45 \\ \hline -3(4) \\ +20 \\ \hline 17 \end{array}$$

Para 19: forma ($a + 2b$)

$$\begin{array}{r} 42094(5) \\ +10 \\ \hline 4210(4) \\ +8 \\ \hline 421(8) \\ +16 \\ \hline 43(7) \\ +14 \\ \hline 5(7) \\ +14 \\ \hline 19 \end{array}$$

Por que funciona

Da maneira como a e b foram definidos, tem-se

$$n = 10a + b$$

O processo se resume em achar um número k tal que $n = 10a + b$ seja um múltiplo do número primo p se, e só se, $m = a + kb$ for múltiplo de p. Ora, da identidade

$$n = 10m + (1 - 10k)b,$$

deduz-se que: Se k for tal que $1 - 10k$ seja divisível pelo número primo p, então:

i) se p ($\neq 2$ e, $\neq 5$) dividir n, p dividirá m;

ii) reciprocamente, se p dividir m, p dividirá n.

Para concluir que um número primo p, $p \neq 2$ e $p \neq 5$ *é* um divisor de n se, e somente se, ele for um divisor de m, podemos escolher k de modo que p seja um divisor de $1 - 10k$ e é este o "segredo" da tabela.

Ilustrando:

$p = 7$: $1 - 10k$ é divisível por 7 para $k = 5$, $k = -2$ (e para muitos outros valores de k, porém todos de valor absoluto maior). Daí, a forma aditiva $a + 5b$ e a subtrativa, $a - 2b$, isto é, no exemplo apresentado: $n = 33684$ é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m = 3388 é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m' = 378 é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m'' = 11 é divisível por 7.

$p = 11$: $1 - 10k$ é divisível por 11 para

$k = 10$, $k = -1$, etc. Daí a forma aditiva $a + 10b$ e a subtrativa, $a - b$.

Para o leitor familiarizado com congruências, "achar k de modo que p seja um divisor de $1 - 10k$ equivale a resolver a equação $10^k \equiv 1 \pmod{p}$ que tem infinitas soluções para p e 10 primos entre si, sendo todos os valores de k côngruos entre si, módulo p.

Uma equação motivadora

Gilder da Silva Mesquita

Quando eu era aluno de um curso pré-vestibular, meu professor de Álgebra apresentou o problema: Resolver a equação irracional

$$\sqrt{\sqrt{x-2}+2} = x-4\ ,$$

usando apenas técnicas aprendidas no ensino fundamental, portanto, sem usar resultados sobre raízes de equações algébricas, vistos no ensino médio (2º grau). Aparentemente não parecia nada fora do comum, mas...

qual é a primeira ação natural? Elevar ambos os membros ao quadrado, não é?

$$\sqrt{x-2}+2 = (x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-2} = x^2-8x+14.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$x-2 = x^4-16x^3+92x^2-224x+196 \Rightarrow$$

$$x^4-16x^3+92x^2-224x+198 = 0.$$

"E agora, José?" Como resolver essa equação, usando apenas recursos do ensino fundamental? Acredite, é possível! E esse é um problema desafiador, do tipo que devemos oferecer aos nossos alunos, pois exige alguma criatividade e exercita várias operações algébricas. Vejamos:

Inicialmente observamos que, sendo a raiz quadrada um número não negativo, devemos ter $x \geq 4$

Fazendo a substituição

$$\sqrt{x-2} = y \quad (y \geq 0),$$

obtemos $x - 2 = y^2$ e a equação fica $\sqrt{y+2} = y^2 - 2$, logo, $y \geq \sqrt{2}$..

Como não adianta elevar ao quadrado novamente, vamos tentar uma fatoração e uma nova mudança de variável:

$$\sqrt{y+2} = y^2 - 2 = y^2 - 4 + 2 = (y+2)(y-2) + 2$$

Fazendo a substituição $z = \sqrt{y+2}$, temos

$$y + 2 = z^2 \text{ e } y - 2 = z^2 - 4 \text{ e, então,}$$

$$z = z^2(z^2 - 4) + 2 \text{ ou } z - 2 = z^2(z-2)(z+2)$$

e essa equação podemos resolver. Vejamos:

1º) se $z - 2 = 0$, temos a solução $z = 2$ [esta solução, em geral, nossos alunos perdem fazendo o cancelamento do termo $(z - 2)$].

2º) se $z - 2 \neq 0$, temos $z^2(z+2) = 1$ ou $z^3 + 2z^2 - 1 = 0$.

De $z = \sqrt{y+2}$ e $y \geq \sqrt{2}$,

temos $z \geq \sqrt{\sqrt{2}+2} \geq 1$, mas então $z^3 + 2z^2 \geq 3$ portanto, não se po-de ter $z^3 + 2z^2 - 1 = 0$ logo, a única solução da equação em z é $z = 2$, que faz $y = 2$ e, então, $x = 6$.

Logo, $x = 6$ é a única solução real da equação proposta inicialmente.

E a equação é de fato motivadora!

Um leitor nos encaminhou uma outra solução da equação, usando simplesmente fatoração. Vamos lá.

Desdobrando-se alguns termos da expressão, teremos:

$$x^4 - 7x^3 - 9x^3 + 11x^2 + 63x^2 + 18x^2 - 99x - 126x + 198 = 0$$

Colocando-se em evidência x^2 no 1º, 2º e 4º termos, $-9x$ no 3º, 5º e 7º termos e 18 no 6º, 8º e 9º termos, teremos:

$$x^2(x^2 - 7x + 11) - 9x(x^2 - 7x + 11) + 18(x^2 - 7x + 11) = 0,$$

$$\text{ou ainda } (x^2 - 9x + 18)(x^2 - 7x + 11) = 0,$$

$$\text{que é equivalente a } (x - 6)(x - 3)(x^2 - 7x + 11) = 0.$$

As raízes dessa última equação são obtidas facilmente:

$$x = 6,\ x = 3,\ x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

Substituindo-se na equação dada, somente $x = 6$ é solução.

Frações: da forma fracionária à decimal A lógica do processo

Nilza Eigenheer Bertoni

Um assunto que nem sempre é bem compreendido por nossos alunos é a passagem da escrita de um número racional, como quociente entre números inteiros, na forma de uma fração, para sua forma decimal. Perguntas como: *onde colocar a vírgula?, quando se escreve* 0 *no quociente?, quando se passa para a casa seguinte sem colocar o* 0 *?* mostram que o estudante está tentando reproduzir uma técnica sem compreender o que está fazendo.

Neste artigo, fazemos e discutimos essa passagem, da notação de fração para a escrita decimal, usando também outras bases de numeração. Mais do que simples elucubração ou exercício de raciocínio, o que pretendemos é relacionar, comparar e fazer analogias com o objetivo de levar a uma compreensão mais sólida dos fatos matemáticos que justificam a técnica usada.

O conhecimento de como se pode fazer a divisão do numerador pelo denominador em outras bases de numeração pode esclarecer o verdadeiro significado desse procedimento tão corriqueiro e automatizado no sistema decimal.

Pensar nessas coisas desenvolve um relacionamento diferente, mais íntimo e profundo com a Matemática. Forma também um conhecimento mais reflexivo e interiorizado, no qual podemos buscar respostas para nossos próprios questionamentos ou para as intempestivas e curiosas perguntas dos nossos alunos.

Os sistemas posicionais de numeração

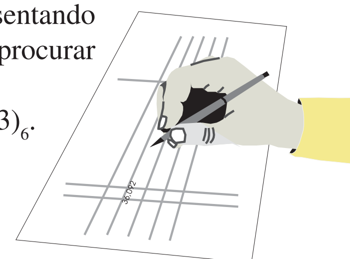
O nosso sistema de numeração é posicional e de base 10, o *sistema decimal*. Conseguimos escrever qualquer número natural apenas com os símbolos usados para indicar os números naturais de 0 a 9, aqueles menores que 10, a base escolhida. Assim, se escrevemos uma seqüência desses símbolos ou algarismos, como $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$, sabemos, pelos princípios que regem esse sistema, que tal notação significa $a_n 10^{10} + a_{n-1} 10^{n+1} +...+ a_1 10^1 + a_0 10^0$.

Os princípios gerais desse sistema aplicam-se igualmente a outro sistema posicional, com uma outra base b escolhida. Nesse caso, símbolos serão atribuídos aos números $0, 1,..., b-1$, menores que a base, e o significado de uma seqüência $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$, desses símbolos nesse sistema será

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n+1} +...+ a_1 b^1 + a_0\ b^0.$$

Como exemplo, se temos 603 em nosso sistema decimal, representando $6 \cdot 100 + 3$, e queremos escrevê-lo no sistema de base 6, devemos procurar expressá-lo em grupos de potência de 6. Verifica-se que

$603 = 2 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 3$, logo 603 se escreve como $(2443)_6$.



A notação posicional para as frações

Um tal sistema pode ser estendido, ou ampliado, de modo a poder representar também números não inteiros. A idéia-chave é a seguinte: observando que, na representação de um número inteiro na base 10, cada posição da esquerda para a direita corresponde a um grupo 10 vezes menor que o anterior, se continuamos uma casa à direita da casa das unidades, ela deve representar *uma quantidade* 10 *vezes menor que a unidade*, ou seja, deve representar o que chamamos de *décimo*.

Vale observar que essa idéia simples e brilhante passou por percalços históricos, antes de ser definitivamente adotada. Os babilônios já a conheciam, por volta de 2000 a.C. Eles usavam um sistema posicional sexagesimal (base 60) e estenderam sua escrita para as casas fracionárias, significando $1/60$, $1/60^2$ etc.

Entretanto, não tinham um símbolo para o zero nem um símbolo que fizesse a separação entre casas inteiras e fracionárias. Num mundo com pouquíssima comunicação, essa notação não se generalizou. Os hindus tinham o sistema decimal com o zero, mas paravam nas unidades, não usando casas fracionárias. Para as frações usavam notação com dois símbolos, semelhantes a numerador e denominador.

Analogamente ao que aconteceu com o zero, que só foi usado muito tempo depois dos outros naturais, também a notação para as frações num sistema posicional só foi retomada ou reinventada –, agora com separação entre a parte inteira e a parte fracionária –, muito mais tarde, no século XVI, por vários matemáticos.(*)

Da notação fracionária para a posicional

Se temos um número racional escrito em duas notações - a fracionária (com numerador e denominador) e a posicional (com casas após a vírgula) –, como obter uma da outra? Neste texto, vamos explicitar a lógica do que se chama *passar para a forma decimal*, isto é, a passagem da notação fracionária para a forma posicional, com vírgula e casas após a vírgula – no Brasil e em muitos outros países, usa-se a vírgula para indicar a separação entre a parte inteira e a fracionária; em países de língua inglesa, usa-se o ponto, como nas calculadoras (ver **RPM** 21, p. 25).

Sabemos como fazer isso em nosso sistema de base 10. Tudo o que temos a fazer é dividir o numerador pelo denominador, sem parar no resto inteiro. Por exemplo, em 3/4, dividindo-se 3 por 4, obtém-se 0,75. Mas qual a lógica desse processo? Por que ele funciona? Para responder a essas perguntas é conveniente pensarmos antes na fração como resultado de uma divisão.

Comparação entre dois usos do número racional

Os livros didáticos comumente apresentam a utilização do número racional escrito na forma de fração no caso em que uma unidade é dividida em partes iguais (cujo número é indicado pelo denominador), das quais se toma um certo número (o numerador). Logo após, usam a fração como resultado da divisão do *numerador* pelo *denominador*, muitas vezes sem mostrar a equivalência das duas situações.

Vale a pena mostrar essa equivalência. Por exemplo, se consideramos o número racional 3/4. Tanto ele se aplica ao caso em que se têm 3 partes de 1 bolo que foi dividido em 4 partes iguais, como ao caso em que se pretenda dividir 3 bolos igualmente por 4 crianças. Com efeito, nessa segunda situação, um bom método é dividirmos 1 bolo de cada vez em 4 partes iguais e

(*) *Adam Riese* publica em 1522, na Alemanha, uma tabela de raízes quadradas na qual aparece a parte fracionária de cada raiz (uma aproximação, no caso das raízes não inteiras) expressa em notação decimal. É provável que o uso de um ponto para separar a parte inteira da decimal tenha ocorrido pela primeira vez na *Aritmética de Pellos*, de 1492. Em 1530 *Rudolf* usa, na Alemanha, um traço vertical para separar a parte inteira da parte decimal. Em 1585, *Stevin*, flamengo, apresenta um tratado sistemático sobre as frações decimais, em notação, contudo, pouco prática. *Napier*, num trabalho de 1617, usa o ponto amplamente, estendendo seu uso às operações.

darmos 1 parte a cada criança. Ao final, cada uma terá recebido 1 quarto de cada bolo, portanto 3 quartos no total.

A lógica da divisão "continuada"

Consideremos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{\quad 4 \quad} \\ 30 & \;0{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Analisando o processo, vemos que, ao dividir 3 por 4, não obtemos nenhuma unidade, mas podemos pensar nesse 3 como 30 décimos que, divididos por 4, dão 7 décimos e ainda sobram 2 décimos. Esses, por sua vez, podem ser pensados como 20 centésimos que, divididos por 4, dão 5 centésimos, sem deixar resto. Ou seja, nesse sistema, se uma divisão não tem quociente expresso por um número natural com resto nulo e queremos continuá-la após a vírgula, o que estamos buscando é a quantidade de décimos, centésimos, etc. que ainda podemos obter no resultado.

Na comparação entre o sistema decimal e um outro sistema posicional, surge a indagação: como é o processo de divisão para escrevermos uma fração, digamos, 3/4 , no sistema de base 6, por exemplo?

Passagem da notação fracionária para a notação posicional de base 6

Na base 6 precisamos só dos algarismos de 0 a 5. Como vai funcionar aqui o método da divisão continuada? A fração 3/4 continua sendo o resultado da divisão de 3 por 4 mesmo nesse novo sistema. Se efetuamos a divisão nesse sistema, devemos obter o desenvolvimento procurado. Mas o que significa dividir nesse sistema?

Analogamente ao caso da divisão no sistema decimal, também no caso da base 6 poderemos continuar uma divisão após a vírgula, buscando a quantidade de sextos, de trinta e seis avos (6^2 avos), etc. Ou seja:

$$\begin{array}{l|l} 3 & \underline{\quad 4 \quad} \\ \text{resto } 3 = 3 \times 6 = 18 \text{ sextos} & \;(0{,}43)_6 \\ \text{resto } 2 = 2 \times 6 = 12 \text{ trinta e seis avos} & \end{array}$$

Isto é, na base 6, a fração 3/4 se escreve como 0,43, ou seja: 4 sextos e 3 trinta e seis avos. E, de fato, $4/6 + 3/36 = (24 + 3)/36 = 27/36 = 3/4$.

No caso da fração imprópria, o processo é análogo, sendo que a parte inteira não é 0 e também vai escrita na base 6. Em qualquer outra base, o processo é o mesmo, mas o resultado pode surpreender. Essa mesma fração, por exemplo, na base 7 teria um desenvolvimento infinito periódico: 3/4 = (0,515151...).

Isso nos leva a procurar novas comparações entre sistemas de bases diferentes. Na base 10, desenvolvimento decimal infinito periódico só ocorre para frações que apresentam, em sua forma reduzida, algum fator diferente de 2 ou 5 no denominador. Numa outra base, também ocorre o mesmo: a presença, no denominador de uma fração em sua forma reduzida, de um fator primo que não seja divisor da base implica que essa fração terá um desenvolvimento infinito periódico. Verificar isso para algumas frações e algumas bases poderá ser uma tarefa interessante.

Algumas técnicas operatórias

(de outros tempos e de outros lugares)

Ronaldo Nicolai

Aprendemos na infância – e usamos inúmeras vezes – algoritmos para efetuar 4 operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Esses algoritmos estão intrinsecamente ligados ao nosso sistema de numeração mas podemos nos perguntar: será que são os únicos existentes? Foram sempre usados? São universalmente reconhecidos como os melhores?

Neste artigo descrevemos algumas técnicas operatórias, de aparências talvez exótica, usadas em outros tempos e outros lugares. Apresentaremos também pequenas variações dos algoritmos habituais que ajudam a compreender porque estes algoritmos fornecem as respostas desejadas.

Adição

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 5\,8\,4 \\ +\quad 9\,7 \\ \hline 6\,8\,1 \end{array}$$

ou

$$\begin{aligned} 584 + 97 &= (500 + 80 + 4) + (90 + 7) = \\ &= 500 + (80 + 90) + (4 + 7) = \\ &= 500 + 170 + 11 = 500 + (100 + 70) + (10 + 1) = \\ &= (500 + 100) + (70 + 10) + 1 = \\ &= 600 + 80 + 1 = 681 \end{aligned}$$

O algoritmo da adição realiza, simultaneamente, a maior parte das operações acima detalhadas.

Multiplicação

a) Usando uma decomposição como a anterior e aplicando a propriedade distributiva, temos

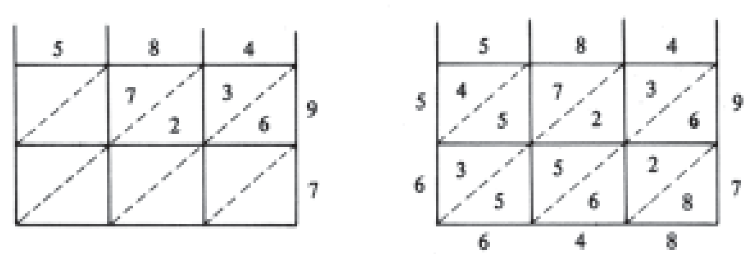
$$584 \times 97 = (500 + 80 + 4) \times (90 + 7) =$$
$$= 4500 + 7200 + 360 + 3500 + 560 + 28$$

ou, de modo um pouco mais prático

$$\begin{array}{r} 584 \\ \underline{\times 97} \\ 28 \\ 560 \\ 3500 \\ 360 \\ 7200 \\ \underline{45000} \\ 56648 \end{array}$$

b) Multiplicação em gelosia

Os dois quadros abaixo ilustram o algoritmo em gelosia para efetuar 584×97. Não se sabe quando ou onde a multiplicação em gelosia apareceu, mas a Índia parece ser a fonte mais provável. Lá foi usada pelo menos desde o século doze e depois parece ter sido levada à China e à Arábia.



c) Técnica camponesa ou russa

Foi uma técnica comum na Europa medieval. Chamou-se multiplicação russa pois era supostamente usada pelos camponeses russos até a 1ª Guerra Mundial. A multiplicação de 584 por 97 ilustrará o processo:

97	584*	584
48	1168	
24	2336	
12	4672	
6	9344	
3	18688*	18688
1	37376	37376
		56648

O processo consiste em dividir por 2 um dos fatores (com aproximação para menos, se for ímpar) e, simultaneamente, dobrar o outro fator. Somam-se os resultados das linhas dobradas onde a correspondente metade for ímpar. Tente descobrir por que funciona.

Subtração

Várias técnicas podem ser usadas para efetuar uma subtração:

a) Adicionar o mesmo aos dois termos da subtração:

$$\begin{array}{r} 584 \\ -\ 97 \\ \hline \end{array} \quad \text{e o mesmo que, somando 3, efetuar} \quad \begin{array}{r} 587 \\ -100 \\ \hline 487 \end{array}$$

Outro exemplo?

$$304 - 76 = \underset{+4}{380 - 80} = \underset{+20}{328 - 100} = 228$$

b) Podemos também subtrair o mesmo número dos dois termos

$$584 - 97 = \underset{+4}{580 - 93} = \underset{-80}{500 - 13} = \underset{-10}{490 - 3} = 487$$

c) Quanto devemos acrescentar ao 97 para obter 584?

$$\begin{array}{rcrl}
97 & + & 3 & = 100 \\
100 & + & 400 & = 500 \\
500 & + & \underline{84} & = 584 \\
 & & 487 &
\end{array}$$

d) Quanto devemos tirar de 584 para obter 97?

$$\begin{array}{rcrl}
584 & - & 4 & = 580 \\
580 & - & 80 & = 500 \\
500 & - & \underline{400} & = 100 \\
100 & - & 3 & = 97 \\
 & & 487 &
\end{array}$$

Divisão

Sabemos que, dados dois números inteiros positivos a e b, existe um único par de números inteiros q e r, chamados quociente e resto, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$. O algoritmo da divisão nos fornece o quociente q e o resto r.

Em alguns países, como a Inglaterra e os Estados Unidos, o algoritmo inicial para achar q e r é diferente do nosso. (Também a maneira de dispor a, b, q e r difere um pouco da nossa.)

Vamos exemplificar:

$$\begin{array}{r|l}
317 & 8 \\ \cline{2-2}
-80 & 10 \\ \hline
237 & 20 \\
-160 & \\ \hline
77 & 5 \\
-40 & \\ \hline
37 & 4 \\ \cline{2-2}
-32 & \boxed{39} \\ \hline
5 &
\end{array}$$

ou, começar por exemplo, com 30 no quociente:

$$\begin{array}{r|l}
317 & 8 \\ \cline{2-2}
-240 & 30 \\ \hline
77 & 9 \\
-72 & \boxed{39} \\ \hline
5 &
\end{array}$$

Qualquer número poderia ser colocado no lugar reservado ao quociente desde que o produto deste número pelo divisor seja menor do que ou igual ao respectivo dividendo. Na prática, o que fazemos é tomar o maior número possível nessas condições, a fim de abreviar o processo. O quociente da divisão é a soma do quocientes parciais. Mais um exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 509 & 37 \\ \cline{2-2} -370 & 10 \\ \hline 139 & 2 \\ -74 & \\ \hline 65 & \underline{\ 1\ } \\ -37 & 13 \\ \hline 28 & \end{array}$$

ou, como os americanos e ingleses escrevem:

$$\begin{array}{rl} & \underline{10 + 2 + 1} = 13 \\ 37) & 509 \\ & \underline{370} \\ & 139 \\ & \underline{74} \\ & 65 \\ & \underline{37} \\ & 28 \end{array}$$

Cada criança, a seu tempo, vai encurtando o processo, chegando eventualmente ao algoritmo usual:

$$\begin{array}{r|l} 317 & 8 \\ \cline{2-2} -24 & 39 \\ \hline 77 & \\ -72 & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r|l} 317 & 8 \\ \cline{2-2} 77 & 39 \\ 5 & \end{array}$$

Convém observar que o último algoritmo, predominante em nossas escolas, é o que exige um cálculo mental maior.

Capítulo 3

Geometria

Retângulo áureo e divisão áurea

Geraldo Ávila

1. O retângulo áureo

Chama-se *retângulo áureo* qualquer retângulo *ABCD* (Figura 1) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como *ABFE*, o retângulo restante, *CDEF*, será semelhante ao retângulo original.

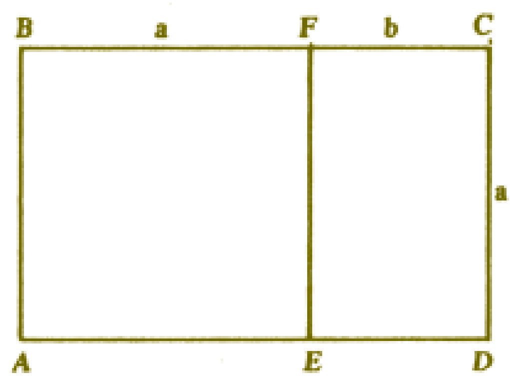


Figura 1

Se $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Como veremos logo adiante, esse tipo de retângulo tem muitas propriedades interessantes que justificam o qualificativo “áureo”. Ele tem sido considerado por arquitetos e artistas como o retângulo mais bem proporcionado e de grande valor estético. A Figura 2 reproduz a foto de uma residência suburbana de Paris, projetada pelo famoso arquiteto Le Corbusier, na qual ele utiliza o retângulo áureo. Há aí dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente, representado pela parte da casa à esquerda da escada.

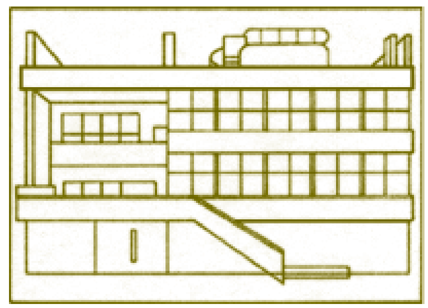


Figura 2

O Partenon (Figura 3), ou templo da deusa Atena, uma das mais admiradas obras da arquitetura universal, revela, em seu frontispício (Figura 4) um quase exato retângulo áureo. Todavia não há evidencia histórica de que, ao construir o templo no 5º século a.C., os arquitetos de Péricles tenham conscientemente usado o retângulo áureo.

Figura 3

Figura 4

Voltemos à relação (1). Dela decorre, por uma propriedade bem conhecida das proporções, que:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-a},$$

$$\text{ou seja, } \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \ .$$

Isto significa que se o retângulo de lados $a + b$ e a é áureo, então também o é o retângulo de lados a e b.

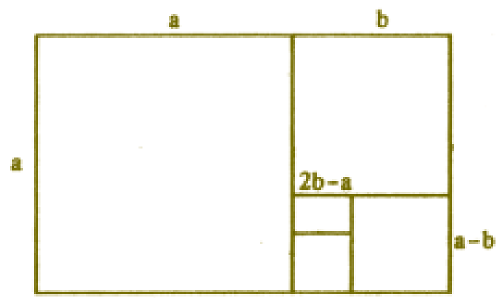


Figura 5

Evidentemente o mesmo raciocínio se aplica para mostrar que também são áureos os retângulos de lados b e $a - b$, $a - b$ e $2b - a$, etc. (Fig. 5). Em outras palavras, dados os números positivos a e b, satisfazendo a relação (1), formemos a seqüência $a + b$, a, b, a_2, a_3, ..., onde

$$a_2 = a - b,\ a_3 = b - a_2 = 2b - a, \text{ e, em geral } a_n = a_{n-2} - a_{n-1}.$$

Trata da seqüência

$$a + b,\ a,\ b,\ a - b,\ 2b - a,\ 2a - 3b,$$

$$5b - 3a,\ 5a - 8b,\ 13b - 8a,\ \ldots \quad (2)$$

Pois bem, o raciocínio anterior estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta seqüência são os lados de um retângulo áureo. Portanto, o processo anterior de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

É fácil provar que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis. Se fossem comensuráveis, teriam um submúltiplo comum σ, de sorte que, com referencia à Figura 1,

$$AD = (a + b)\,\sigma \text{ e } AB = a\sigma$$

onde a e b seriam então números inteiros. Em conseqüência, todos os números da seqüência (2) seriam inteiros e positivos. Isto é um absurdo, pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Concluímos, então, que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

2. A divisão áurea

O retângulo áureo está intimamente ligado com a chamada *divisão áurea* de um segmento, ou divisão em *média* e *extrema razão*, que introduziremos a seguir.

Diz-se que um ponto C de um segmento AB (Figura 6) divide este segmento em média e extrema razão se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \quad (3)$$

Figura 6

A relação (3) é precisamente a relação (1), se pusermos $AC = a$ e $CB = b$, de sorte que os segmentos AC e CB da divisão áurea (ou $AB = a + b$ e $AC = a$) são os lados de um retângulo áureo.

É interessante notar que se C_1 divide AB em média e extrema razão, e se marcarmos no segmento AB os pontos C_2, C_3, C_4,... de tal maneira que $AC_2 = C_1B$, $AC_3 = C_2C_1$, $AC_4 = C_3C_2$, ..., (Figura 7), então C_n divide AC_{n-1} em média e extrema razão $n = 2, 3, 4,...$ Este resultado segue facilmente do que já provamos antes sobre a seqüência infinita

Figura 7

de retângulos áureos, donde segue também que os segmentos AC_1 e C_1B da divisão áurea de AB são incomensuráveis. Sugerimos que o leitor faça uma demonstração completa destes resultados.

Como já observamos há pouco, as relações (1) e (3) são idênticas quando pomos $AC = a$ e $CB = b$. Delas segue-se que

$$b^2 = ab = a^2. \qquad (4)$$

O número $m = b/a$ é conhecido como a *razão áurea*. Dividindo a equação anterior por a^2 obtemos:

$$m^2 + m = 1. \quad (5)$$

O primeiro membro torna-se um quadrado perfeito quando lhe adicionamos 1/4:

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{ou seja,} \quad \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Extraindo a raiz quadrada e notando que $m > 0$, teremos:

$$m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{portanto,} \quad m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618 \quad (6)$$

3. Construções geométricas

Vamos construir um retângulo áureo a partir de seu menor lado $AE = a$ (Figura 8). Para isso construímos $EF = AE$ perpendicularmente a AE. Com centro em G, ponto médio do segmento

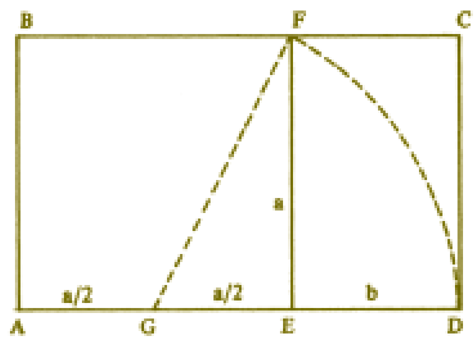


Figura 8

AE, traçamos o arco $\overset{\frown}{FD}$, onde D jaz na reta AE e E é interno ao segmento AD. Como $GF = GD = b + a/2$, o teorema de Pitágoras aplicado ao triangulo retângulo GEF nos dá:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \therefore$$

Simplificando, obtemos daqui a relação (4) que, como vimos, equivale à relação (1). Logo $ABCD$ é um retângulo áureo.

Se o problema fosse dividir o segmento $AE = EF$ em média e extrema razão, bastaria completar a construção anterior marcando, no segmento AE, o ponto H tal que $AH = b$ (Figura 9).

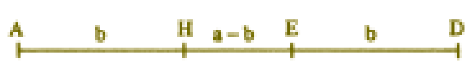


Figura 9

Observações finais

A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. Ao que tudo indica, essa divisão foi descoberta no pentágono regular, que exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. Talvez este tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita (Figura 10).

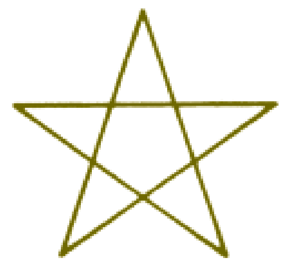


Figura 10

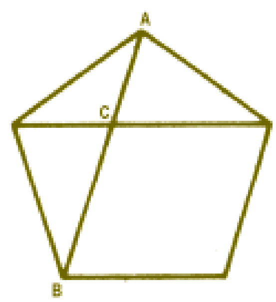


Figura 11

Como exemplo de ocorrência da divisão áurea num pentágono regular convexo mencionamos que a interseção de duas de suas diagonais divide qualquer delas em média e extrema razão. Assim, na Fig, 11,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar esse resultado.

É muito improvável que Pitágoras ou seus primeiros discípulos soubessem que os segmentos da divisão áurea fossem incomensuráveis, embora haja fundadas razões para se acreditar que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com o pentágono regular no fim do 5º século a.C. Certamente, Pitágoras e seus discípulos sabiam como construir geometricamente a solução (6) da equação (5). As construções correspondentes às Figuras 8 e 9 acima se encontram nos *Elementos* de Euclides, de cerca de 300 anos A.C.

Na antiguidade, a divisão de um segmento em média e extrema razão tornou-se tão familiar que era conhecida simplesmente como “seção”, em qualquer qualificativo. O nome “divisão áurea” lhe foi dado por Kepler (1571-1630), que escreveu:

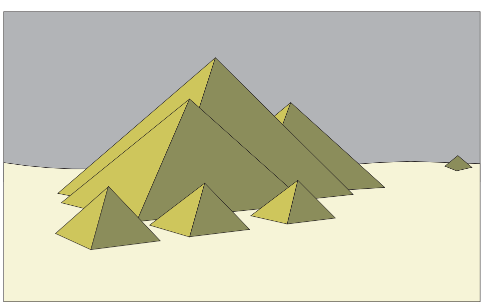
A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.

As pirâmides do Egito e a razão áurea

José Cloves Verde Saraiva

Dizemos que um ponto B divide um segmento AC em média e extrema razão quando.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$



Seja $\lambda = \frac{AC}{AB}$.

Temos:

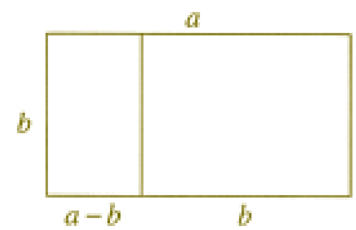
$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

Resulta que $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, isto é, que

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}68\ldots$$

A razão λ é denominada *razão áurea*.

Seja **R** um retângulo de lados a e b ($b < a$) tal que o retângulo de lados b e $a - b$ seja semelhante ao retângulo **R**.



Resulta que $a - b < b$ e que a/b é igual à razão áurea. Um retângulo **R** com essa propriedade é chamado retângulo áureo.

A divisão de um segmento em média e extrema razão já aparece no *Livro* VI de Euclides e retângulos áureos são encontrados com freqüência nas esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga. Por esse motivo a razão áurea é normalmente atribuída aos gregos. Ao que parece, ela já estava presente nas pirâmides do antigo Egito!

A relação $\lambda^2 = \lambda + 1$ mostra que um triângulo de lados 1, $\sqrt{\lambda}$ e λ é um triângulo retângulo com hipotenusa λ e catetos 1 e $\sqrt{\lambda}$.

Definição 1

Um triângulo é um *triângulo áureo* quando ele é semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa λ e catetos 1 e $\sqrt{\lambda}$.

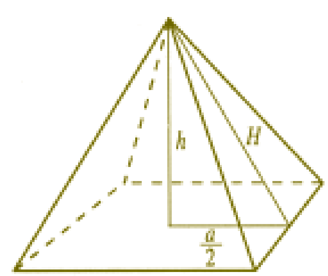
É fácil demonstrar o seguinte:

Proposição 1

Um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c ($b > c$) é áureo se, e somente se,

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\lambda} = 1{,}272 \ldots .$$

Definição 2



Seja Δ uma pirâmide reta de altura h com base quadrada de lado a e seja H a altura de suas faces. Dizemos que Δ é uma *pirâmide áurea* quando o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ for um triângulo áureo.

O historiador grego *Heródoto* (cerca de 500 a.C.) relata que aprendeu com os sacerdotes que as grandes pirâmides do Egito (construídas em torno de 2500 a.C.) satisfazem a seguinte propriedade (P):

(P) : A área de cada face triangular é igual à área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Com a notação da definição 2, uma pirâmide reta de base quadrada satisfaz a propriedade (P) se e somente se

$$\frac{aH}{2} = h^2.$$

Proposição 2

Uma pirâmide reta com base quadrada satisfaz a propriedade (P) se, e somente se, ela for uma pirâmide áurea.

Demonstração

Suponhamos em primeiro lugar que a pirâmide é áurea, isto é, que o triângulo retângulo com hipotenusa H e catetos h e $\frac{a}{2}$, (supondo $h > \frac{a}{2}$) é áureo.

Temos:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\lambda}, \quad H = \frac{a}{2}\lambda$$

e portanto,

$$h = \frac{a}{2}H = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \lambda = \left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda}\right)^2,$$

isto é, a pirâmide satisfaz a propriedade (P).

Reciprocamente, suponhamos que a pirâmide satisfaça a propriedade (P). Das relações

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \text{e} \quad aH = 2h^2$$

obtemos

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{4h^4}{4H^2},$$

que implica

$$\left(\frac{H}{h}\right)^4 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1.$$

Resulta que

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \lambda \quad \text{ou} \quad \left(\frac{H}{h}\right) = \sqrt{\lambda}.$$

Logo,

$$h\frac{2}{a} = \frac{H}{h} = \sqrt{\lambda}$$

e, portanto, o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ é áureo (veja Proposição 1).

As dimensões (em metros) para as pirâmides de *Quéops* (base quadrada), *Quéfren* (base quadrada) e *Miquerinos* (base retangular) são:

	Quéops	*Quéfren*	*Miquerinos*
Altura da pirâmide	146,59	143,50	65,00
Dimensões da base	230,33 × 230,33	215,20 × 215,20	102,20 × 104,60

Para *Quéops* temos

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}59}{230{,}33} = 1{,}272.$$

Resulta que *Quéops* é, de fato, uma pirâmide áurea (Proposição 1). Entretanto, para *Quéfren*, temos

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}50}{215{,}20} = 1{,}333,$$

de forma que *Quéfren* não é uma pirâmide áurea, Miquerinos também não é (sua base não é sequer quadrada).

A história conta que *Tales de Mileto* (624-548 a.C.), com a sombra de um bastão, determinou a altura das pirâmides do Egito e, talvez, quem sabe?, tenha verificado que a pirâmide de *Quéops* satisfaz (P)!

Como curiosidade, o leitor pode calcular, usando as dimensões dadas, os volumes das pirâmides e verificar que o volume de *Quéops* é maior do que a soma dos volumes de *Quéfren* e de *Miquerinos*. O leitor também pode verificar que, se as três pirâmides tivessem bases quadradas e fossem áureas (o que "quase" acontece), então, os lados das bases, a_1, a_2 e a_3, e as alturas, h_1, h_2 e h_3, satisfariam:

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow h_3^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Quando a intuição falha

Joel Faria de Abreu

Por imposição do raciocínio lógico, somos levados a demonstrar, na Matemática, até as proposições "intuitivas", tidas como óbvias. Vejamos como estamos sujeitos a erros inesperados, deixando de usar o raciocínio lógico e utilizando apenas a intuição.

Suponhamos que seja possível colocar uma corda circundando a Terra, ajustando-a ao equador. Em seguida, retiramos esta corda, aumentamos um metro no seu comprimento e a recolocamos em volta da Terra, formando uma circunferência concêntrica com o equador. Assim, teremos um vão entre o equador e a corda, ou melhor, uma diferença x entre os raios das duas circunferências. Então, perguntamos: usando-se somente a intuição, qual é o valor aproximado de x? Ou seja, qual é a largura aproximada deste vão entre o equador e a corda?

Cremos que o leitor dirá: não existe vão algum... É desprezível esta diferença... Como a Terra é tão grande e só se aumentou um metro na corda, é claro que o vão é muito pequeno e, por conseguinte, desprezível... Ledo engano! Este vão é de aproximadamente 16 cm! E estranho, pois a intuição nos leva a uma diferença muito pequena, mas recursos matemáticos – estes sim, confiáveis – nos mostram o verdadeiro valor de x. Na realidade, a intuição é um poderoso recurso da inteligência e tem sido responsável por muitas descobertas científicas. Mas, às vezes, a intuição sozinha pode induzir-nos ao erro e o fenômeno que estamos considerando é um exemplo disto.

Passemos ao cálculo de x, sendo C o comprimento do equador e r o raio da Terra, temos:

$$C = 2\pi r$$

$$C + 1 = 2\pi\ (r + x)$$

$$C + 1 = 2\pi r + 2\pi x$$

$$C + 1 = C + 2\pi x$$

$$2\pi x = 1$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \cong 0{,}16$$

Notamos que x é independente de r; independente, portanto, do comprimento da circunferência. Repetindo-se o mesmo processo da experiência anterior, por maior que fosse o comprimento da circunferência, teríamos os mesmos 16 cm.

Passemos, agora, ao segundo exemplo: consideremos um círculo com raio igual ao raio da Terra. Suponhamos ser possível cobrir toda a superfície deste círculo por uma outra superfície, modelável, ajustada a ele. Retiramos, em seguida, esta segunda superfície, aumentamos sua área de um metro quadrado, e a remodelamos, até se transformar novamente num círculo, com área, obviamente, um metro quadrado maior. Em seguida, justapomos as duas superfícies de modo a obter dois círculos concêntricos. Assim, haverá uma diferença x entre os raios dos dois círculos. Perguntamos novamente: usando-se apenas a intuição, qual é um valor aproximado de x?

Cremos que o leitor, desta vez, alertado pelo problema anterior, teria maior cautela para emitir um juízo, baseado apenas em sua intuição. De fato, poderíamos pensar, como conseqüência do erro cometido anteriormente, que x tenha um valor constante. Mas, neste problema, tratando-se de um círculo de enorme área, a diferença é desprezível. Isto porque, agora, pela fórmula

$$A = \pi r^2,$$

e por um cálculo análogo ao primeiro, concluímos que x depende de r. Lançando mão do cálculo do limite, notamos também que x decresce na medida em que r cresce. Na realidade, para o valor de r = 6.355.000 m (raio da Terra), a diferença dos respectivos raios representa uma fração de milímetro. Portanto, desprezível...

De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda "IDEAL"

Geraldo Garcia Duarte Júnior

Tome uma corda esticada, unindo um ponto *A* de São Paulo a m ponto *B* do Rio de Janeiro. Suponha que a distância entre estes pontos *A* e *B* seja de exatamente 400 km. Tome outra corda com um metro a mais que a anterior, ou seja, com 400.001 metros, e fixe também suas extremidades nos pontos *A* e *B*. Ela ficará bamba. Levante esta corda pelo seu ponto médio formando um triângulo, conforme a Figura 1

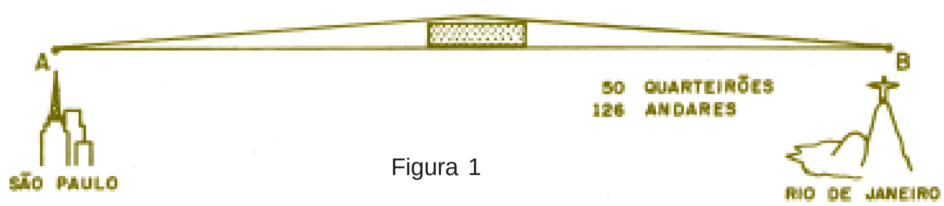


Figura 1

Pergunta-se:

i) A altura *h* deste triângulo formado será maior ou menor que um metro?

ii) O que ocorreria com a altura, se o triângulo formado fosse como o da Figura 2?

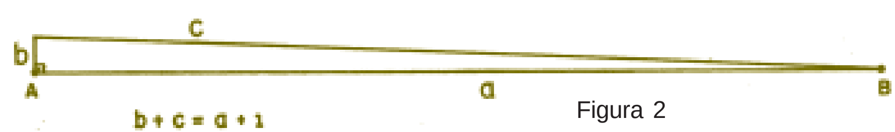


Figura 2

Por mais absurdo que possa parecer, caberia dentro do triângulo, no caso i), um prédio de forma retangular com 126 andares de altura e 50 quarteirões de comprimento!

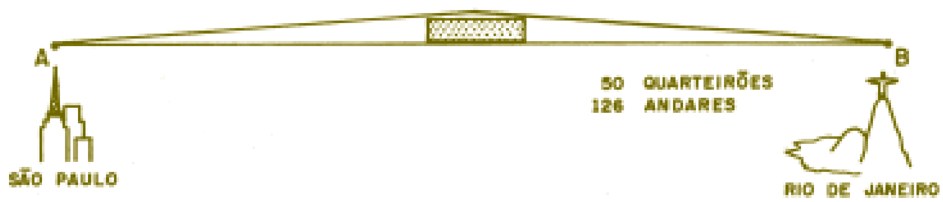
Ao fazermos as contas, vemos que a altura h será aproximadamente 447 metros no caso i) e 0,99999 metros no caso ii), que são valores bem diferentes do imaginado.

Vejamos as soluções:

i) Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 = \left[\frac{a+1}{2}\right]^2 - \left[\frac{a}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}(2a+1)\ . \qquad \text{Logo, } h = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1}.$$

Sendo $a = 400.000$ m, temos $h = \frac{1}{2}\sqrt{800.001} \approx 447$ m.



ii) Neste caso temos as relações $\begin{cases} b + c = a + 1 & (1) \\ b^2 + a^2 = c^2 & (2) \end{cases}$

De (1) temos $c = a - b + 1$ que, aplicado com (2), dá

$$b^2 + a^2 = b^2 + a^2 + 1 + 2a - 2ab - 2b,$$

ou seja, $2ab + 2b = 2a + 1$. Logo, $b = \dfrac{2a+1}{2a+2}$.

Sendo $a = 400.000$ m, temos $b = \dfrac{800.0001}{800.0002} \approx 0{,}999999$ m.

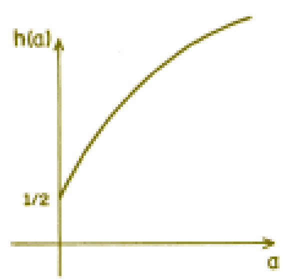
Fazendo os gráficos de h e b como funções de a, temos

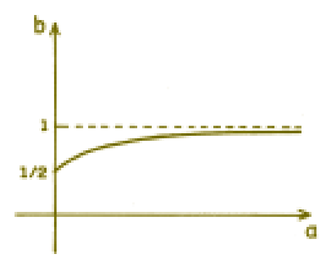
Para nossa surpresa,

$h \to \infty$ quando $a \to \infty$,

$b \to 1$ quando $a \to \infty$.

Perplexos com a solução, ficamos a imaginar por que falha a nossa intuição.





O que é o número π?

Elon Lages Lima

A maneira mais rápida de responder a esta pergunta é dizer que π é a área de um círculo de raio 1. (Por exemplo, se o raio do círculo mede 1 cm, sua área mede π cm^2). Podemos também dizer que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1.

Desde há muito tempo (cerca de 4000 anos!) notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho dessa circunferência. Dito de outro modo, se o diâmetro mede um centímetro, um metro ou um côvado, a circunferência medirá respectivamente π centímetros, π metros ou π côvados. Ainda de outra maneira: se uma circunferência tem comprimento C e diâmetro D, enquanto outra tem comprimento C' diâmetro D', então $C/D = C'/D'$. Este valor constante da razão C/D é um número aproximadamente igual a 3,141592, o qual se apresenta pela letra grega π.

Os babilônios já tinham observado que o valor de π se situa entre

$$3\frac{1}{8} \text{ e } 3\frac{1}{7},$$

ou seja, $\dfrac{25}{8} < \pi < \dfrac{22}{7}$.

Em frações decimais, isto dá $3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

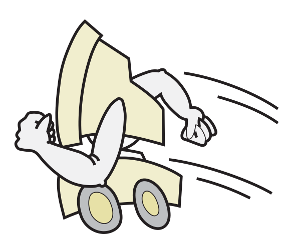
O conhecimento que as pessoas têm sobre o valor de π nem sempre melhorou com o tempo.

Por exemplo, o Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos a.C. (embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas) contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$. (Primeiro Livro dos Reis, VII: 23). É natural que os redatores do Velho Testamento, mais preocupados com assuntos divinos do que detalhes terrenos, não estivessem a par do que com seus vizinhos babilônios já sabiam há mais de um milênio. Mas, em 1931, um cidadão americano de Cleveland, Ohio, publicou um livro segundo o qual o valor exato de π seria 256/81, ou seja 3,16. O livro em si, apesar de todas as heresias que contém, não causa admiração pois o número π sempre provocou irresistível atração aos amadores, pelos séculos afora. O curioso é que o valor 256/81 é o mesmo que foi obtido pelo escriba egípcio Ahmes, autor do famoso *Papiro de Rhind*, escrito 2 mil anos antes de Cristo. Desde Arquimedes, que obteve o valor $\pi = 3{,}1416$, matemáticos se têm ocupado em calcular π com precisão cada vez maior. O inglês Willian Shanks calculou π com 707 algarismos decimais exatos em 1873. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks errava no 527º algarismo (e portanto nos seguintes). Com auxilio de uma maquininha manual, o valor de π foi então calculado com 808 algarismos decimais exatos. Depois vieram os computadores. Com seu auxílio, em 1967, na França, calculou-se π com 500.000 algarismos decimais exatos e, em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões (precisamente 10.013.395) de algarismos exatos!

Esses cálculos de π com um número cada vez maior de algarismos decimais sugerem duas perguntas. A mais inocente seria: quantos algarismos serão necessários para se ter o valor de π? Ora, sabe-se que π é um número irracional. Isto significa que nenhuma fração ordinária (e, conseqüentemente, nenhuma fração decimal finita ou periódica) pode exprimir exatamente o seu valor. Portanto, não importa quantos algarismos decimais tomemos, jamais obteremos o valor exato de π nem chegaremos a uma periodicidade (embora o erro cometido ao se substituir π por uma tal fração seja cada vez menor).

Outra pergunta que se pode fazer é: por que então tanto esforço para calcular π com centenas ou milhares de algarismos decimais? (O computador francês levou 28 horas e 10 minutos. Deus sabe quantos meses ou anos levou William Shanks). Uma resposta é que esses cálculos existem pelo mesmo motivo que existe o *Livro dos Récordes de Guinness*. Uma razão mais prática poderia ser a seguinte: um computador, como toda máquina, precisa ser testado contra possíveis defeitos, antes de começar a funcionar. Uma maneira de fazer isso é mandá-lo calcular alguns milhares de dígitos de π e fazê-lo comparar o resultado obtido com o que já se conhecia.

Mas, voltando às origens de π: desde quando tal número é representado por essa letra grega, equivalente ao nosso "π"? Nos tempos antigos, não havia uma notação padronizada para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro. Euler, a princípio, usava π ou *c* mas, a partir de 1737, passou a adotar sistematicamente o símbolo π. Desde então, todo o mundo o



seguiu. A verdade é que, alguns anos antes, o matemático inglês Willian Jones propusera a mesma notação, sem muito êxito. Questão de prestígio.

O número π surge inesperadamente em várias situações. Por exemplo, Leibniz notou que $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ... = \pi/4$ e Euler provou que a soma dos inversos dos quadrados de todos os números naturais é igual a $\pi^2/6$. A área da região compreendida entre o eixo das abcissas e o gráfico da função $y = e^{-x^2}$ é igual a $\sqrt{\pi}$. Inúmeros outros exemplos poderiam ser mencionados, como a seguinte: a probabilidade para que dois números naturais, escolhidos ao acaso, sejam primos entre si é de $6/\pi^2$.

Desde que ficou clara a idéia de número irracional, começou-se a suspeitar que π era um deles. Euler acreditava na irracionalidade de π, mas quem a provou foi seu contemporâneo Lambert, em 1761. Pouco depois, Euler conjeturou que π seria transcendente, isto é, não poderia ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros (por exemplo, é impossível encontrar inteiros a, b, c tais que $a\pi^2 + b\pi + c = 0$). Este fato foi demonstrado em 1882 por Lindemann, 99 anos depois da morte de Euler.

Da transcendência de π resulta que o antigo problema grego da *quadratura do círculo* não têm solução.

> *Esse problema requeria que se construísse, com auxílio de régua e compasso, um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo dado.*

Tomando o raio do círculo como unidade de comprimento, isto equivale a pedir que se construa, com auxílio de régua e compasso, um segmento de comprimento igual a $\sqrt{\pi}$ (lado do quadrado de área π).

Vamos dizer "construir o número x" para significar "construir, com régua e compasso, a partir de um segmento dado, tomado como unidade, outro segmento de comprimento igual a x".

O problema da quadratura do círculo pede que se construa o número $\sqrt{\pi}$. Isto sugere a questão mais geral: quais os números reais que se podem construir?

Ora, as construções geométricas feitas com régua e compasso consistem em repetir, um número finito de vezes, as seguintes operações básicas: 1) traçar a reta que une dois pontos dados; 2) traçar a circunferência com centro e raio de dados. Um ponto nessas construções só pode ser obtido como interseção de duas retas, de duas circunferências ou de uma reta com uma circunferência.

Considerando-se no plano um sistema de coordenadas cartesianas, uma reta é representada por uma equação do 1º grau $y = ax + b$ e uma circunferência por uma equação do 2º grau $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Assim, um número que se pode construir é sempre obtido como solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas cujos graus são ≤ 2. Prova-se, a partir daí, que se o número real x pode ser construído então x é o resultado de um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, efetuadas a partir de números inteiros.

Em particular, todo número x que pode ser construído (com régua e compasso) é algébrico, isto é, pode ser expresso como raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Como π é transcendente, $\sqrt{\pi}$ também é. Segue-se que a quadratura do círculo não pode ser feita com régua e compasso apenas. Isto encerra a questão.

Infelizmente, nem todas as pessoas que gostam de Geometria, e que se interessam por construções com régua e compasso, sabem disso. E, pensando que o problema da quadratura do círculo ainda está em aberto, imaginam soluções engenhosas, que submetem a revistas e a instituições onde se faz Matemática. Tais soluções são basicamente de 3 tipos: 1º) as que contêm erros devidos a raciocínios defeituosos; 2º) as que apresentam apenas uma solução aproximada para o problema; 3º) as que não se restringem ao uso de régua e compasso. (Por exemplo, empregando certas curvas cuja construção não pode ser efetuada apenas com esses dois instrumentos.)

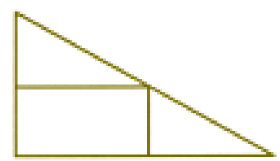
Desde 1775 a Academia Real Francesa decidiu não mais aceitar para análise inúmeras propostas de quadratura para elas enviadas. Mas, em todas as partes do mundo, parece não desaparecerem nunca os quadradores.

Quando eu era estudante, na Universidade de Chicago, havia no Departamento de Matemática uma carta mimeografada que dizia mais ou menos o seguinte: “Prezado Senhor: Recebemos seu trabalho sobre a quadratura do círculo. Infelizmente estamos muito atarefados para examiná-lo. Caso o Sr. nos envie a quantia de 10 dólares, poderemos encarregar um dos nossos estudantes de pós-graduação de analisar seu trabalho e localizar os erros eventualmente nele contidos. Atenciosamente ...” Por causa desta carta padrão, vários colegas meus daquela época abocanharam alguns dólares sem fazer muita força.

O problema do retângulo inscrito

Roberto Ribeiro Paterlini

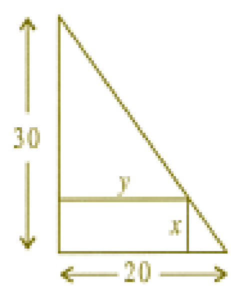
O problema do retângulo inscrito aparece no ensino médio sob várias versões:



Problema do retângulo inscrito: Dado um triângulo retângulo, dentre os retângulos inscritos conforme a figura, encontre o que tem área máxima.

Eis o mesmo problema com um enunciado mais amigável:

Problema da casa: (Vestibular da FUVEST)



Num terreno, na forma de um triângulo retângulo com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y, como na figura.

a) Exprima y em função de x.

b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?

A idéia usual para a resolução deste problema é observar a semelhança entre os triângulos da figura e obter, por exemplo, a relação

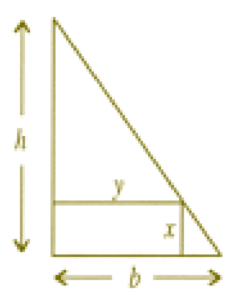
$$\frac{y}{20} = \frac{30 - x}{30},$$

donde $y = 20(30 - x)/30 = (2/3)(30 - x)$. Usando essa relação para substituir y em $A(x) = xy$, temos $A(x) = (2/3)x(30 - x)$, função que nos dá a área do retângulo. A função quadrática A tem ponto de máximo, e nosso problema estará resolvido quando encontrarmos a abcissa desse ponto, o vértice da parábola que é o gráfico da função. As raízes de A são 0 e 30, cuja média aritmética é 15. Portanto, $x = 15$ é a abcissa do vértice, e o valor correspondente para y é 10. Vemos que a altura e a base do retângulo inscrito de área máxima são a metade, respectivamente, da altura e da base do triângulo.

Em um triângulo retângulo qualquer com base b e altura h o resultado é o mesmo: o retângulo inscrito de maior área (entre os retângulos posicionados como na figura) é o que tem base $b/2$ e altura $h/2$. Na figura

$$\frac{y}{b} = \frac{h - x}{h}, \; A(x) = \frac{b}{h}x(h - x)$$

ponto de máximo de $A : x = \dfrac{h}{2}$, valor de $y : \dfrac{b}{2}$.

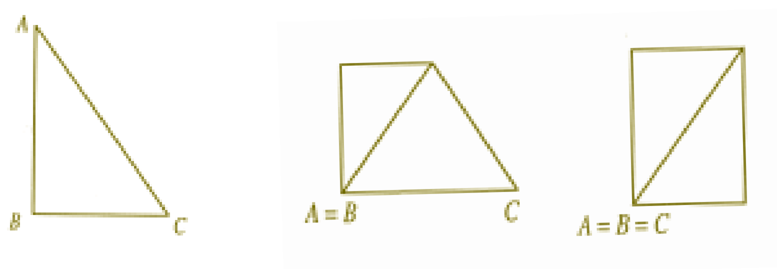


Usando dobradura

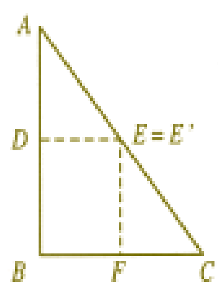
No ano de 2000 estava lecionando uma disciplina de problemas para alunos do Curso Noturno de Licenciatura em Matemática da UFSCar, e certo dia sugeri aos estudantes resolverem esse problema. Minha expectativa era que utilizassem o método descrito acima, e de fato muitos assim o fizeram. Mas tive a agradável surpresa de ver que a estudante Tatiana Gaion Malosso, juntamente com os colegas de seu grupo de trabalho, resolveu facilmente o problema usando dobraduras. Quando incentivamos a criatividade, podemos ver as soluções mais interessantes e aprendemos a pensar com liberdade.

Vamos descrever a solução por dobradura apresentada pela estudante. Tomamos uma folha de papel e a cortamos no formato de um triângulo retângulo ABC.

Dobramos o papel de modo a fazer coincidir o ponto A com o ponto B, e em seguida dobramos de modo a fazer coincidir o ponto C com o ponto B, como nas figuras abaixo.



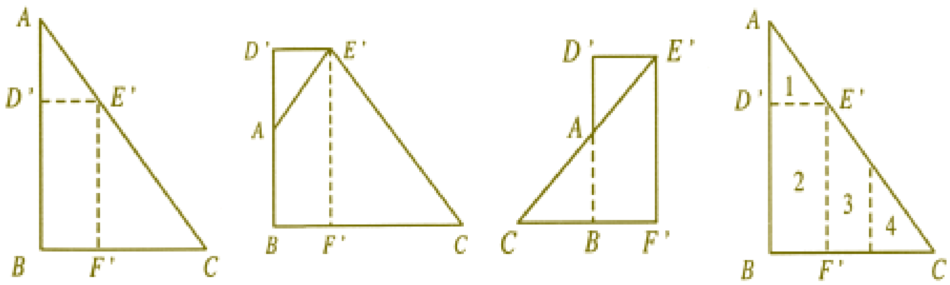
Desdobrando e voltando ao triângulo original, vemos que marcamos duas linhas que se encontram no ponto médio de $\overline{AC}$.



De fato, por construção, D é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, logo, E é o ponto médio de $\overline{AC}$. Da mesma forma, F é o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{FE'}$ é paralelo a $\overline{AB}$, logo, E' é o ponto médio de $\overline{AC}$, e $E = E'$

As duas linhas que marcamos no triângulo determinam um retângulo, cuja altura é a metade da altura do triângulo, e cuja base é a metade da base do triângulo. Observamos que o triângulo original ficou subdividido em três figuras, dois triângulos menores e o retângulo, e a dobradura deixa claro que a soma das áreas dos dois triângulos menores é igual à do retângulo. Portanto, a área do retângulo é a metade da área do triângulo original.

Vamos verificar, usando dobradura, que esse retângulo é o de maior área que se pode obter. Tomamos um outro retângulo inscrito, *BD'E'F'*.



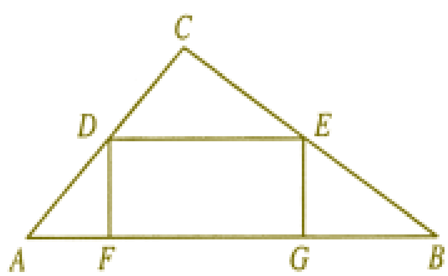
Dobramos o papel na linha $\overline{D'E'}$ (veja as figuras) e tracejamos o segmento $\overline{AB}$ indicado na terceira figura. Em seguida dobramos na linha $\overline{E'F'}$ passando pelo ponto *A* marcado.

O triângulo original fica subdividido em quatro regiões, 1, 2, 3 e 4, de modo que somando as áreas de 1 e 3 obtemos a área de 2 (confira na figura). Mas, como temos a área de 4, vemos que a área de 2 é menor do que a metade da área do triângulo. Portanto, o retângulo *BD'E'F'* não tem área máxima

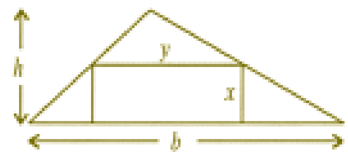
Outros desenvolvimentos

Em qualquer triângulo existe um retângulo inscrito. De fato, um triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos. Na figura a seguir supomos $\angle A$ e $\angle B$ ângulos agudos e construímos o segmento $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{AB}$. Em virtude de serem $\angle A$ e $\angle B$ agudos, os segmentos perpendiculares a $\overline{AB}$ por *D* e *E* intersectam $\overline{AB}$, e obtemos um retângulo inscrito no triângulo.

O leitor pode observar que em um triângulo podem existir retângulos inscritos em até três posições diferentes, com um lado do retângulo sobre um lado diferente do triângulo.



Qualquer que seja a posição, a maior área do retângulo inscrito que se pode obter é a metade da área do triângulo.



$$\frac{y}{b} = \frac{h-x}{h}, \quad A(x) = \frac{b}{h}x(h-x);$$

ponto de máximo de A: $x = h/2$; valor correspondente de y: $b/2$.

Podemos novamente usar dobradura para encontrar o retângulo inscrito de área máxima. Seja ABC um triângulo qualquer, e suponhamos que $\angle A$ e $\angle B$ são agudos. Cortamos um papel na forma do triângulo dado. Usando dobradura, marcamos a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$. Dobramos o triângulo de modo a fazer coincidir o ponto C com o pé desta altura no lado $\overline{AB}$. Continuamos procedendo de modo análogo ao caso do triângulo retângulo.

Triângulos especiais

Rizio Sant'Ana

Teorema

Só *existem cinco triângulos que tenham perímetro numericamente igual* à *área, quando fixamos a unidade* e *exigimos que os lados do triângulo tenham medidas inteiras.*

Demonstração

Sejam a, b, c as medidas dos lados de um triângulo na unidade fixada, p o perímetro e s o semiperímetro. Então, impondo que a área e o perímetro sejam medidos pelo mesmo número (perímetro na unidade e área na unidade ao quadrado), teremos:

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ou seja $4s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

Seja $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$ e como
$s - a + s - b + s - c = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$
temos que $s = x + y + z$ e podemos escrever

$$4(x + y + z) = xyz \quad \text{(I)}$$

Como $s = x + y + z$ e $a = s - x$, temos que $a = y + z$; também $b = x + z$ e $c = x + y$

Demonstremos que o perímetro tem que ser par. Ora,

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

ou seja

$$p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}$$

Para P ser ímpar

- ou um dos lados é ímpar e os outros dois lados são pares;
- ou a, b e c são, os três, ímpares;

em qualquer dos dois casos, a raiz quadrada do numerador é ímpar e p não pode ser inteiro.

Então o perímetro é sempre par, e s é inteiro, o que acarreta serem x, y, e z também inteiros.

1. O triângulo não pode ser eqüilátero. Nesse caso $x = y = z$ e, por (I), $4(3x) = x^3$ ou $x^2 = 12$, o que não produz número inteiro para x.
2. O triângulo não pode ser isósceles. Nesse caso $z = y$, por exemplo, e (I) se transforma em $4(x + 2y) = xy^2$ ou $xy^2 - 8y - 4x = 0$, donde y, para ser inteiro, vai depender de que $4 + x^2$ seja um quadrado perfeito, o que não acontece para nenhum $x > 0$, inteiro.
3. Então x, y e z são inteiros e diferentes e o triângulo será escaleno. Façamos sempre $z > y > x \geq 1$; x não pode valer zero, porque senão $a = s$ e não existe triângulo. Então o menor x é 1, se possível.

   Isolando z:

$$z = \frac{4(x+y)}{xy-4} \quad \text{(II)}$$

Para $x = 1$, $z = \dfrac{4(1+y)}{y-4}$; para $\begin{cases} y = 5, & z = 24 \\ y = 6, & z = 14 \\ y = 8, & z = 9 \end{cases}$

Outros valores de y ou não produzem z inteiros, ou produzem $z < y$.

$$\text{Para } x = 2,\ \ z = \frac{4(2+y)}{2y-4}; \qquad \text{para} \begin{cases} y = 3, & z = 10 \\ y = 4, & z = 6 \end{cases}$$

Outros valores de y ou não produzem z inteiros, ou produzem $z < y$.

Qualquer outro valor de x: terá $y < x$ para z ser inteiro.

Lembrando que $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, podemos escrever:

a	***b***	***c***	**perímetro = área**
29	25	6	60
20	15	7	42
17	10	9	36
13	12	5	30
10	8	6	24

Estes lados definem os únicos cinco triângulos que satisfazem as condições exigidas.

Com efeito, um triângulo que tenha lados medindo 10, 8 e 6 unidades terá, como acabamos de ver, perímetro numericamente igual à área nessa unidade. Construa, então, um triângulo com 10, 8 e 6 cm de lados e torne a medir seus lados em milímetros: ele terá, agora, um perímetro de 240 mm e área de 2400 mm^2. O fenômeno da igualdade desapareceu!

De fato, na equação de partida

$$2s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

pensados como medidas, o 1º membro dá o número de unidades e o 2º dá o número de unidades ao quadrado. Há uma diferença na dimensão.

Não só essa propriedade de coincidência numérica da área e perímetro não resiste à mudança de unidades como também ela não é privilégio de certos triângulos. De fato, dado um triângulo qualquer, existe sempre uma unidade de comprimento em que o perímetro seja o mesmo que a área: basta tomar o perímetro p' numa unidade u' qualquer e a área A' na unidade $(u')^2$ tomar a nova unidade $u = (A'/p')u'$. O leitor pode verificar que, na unidade u, o perímetro e a área do triângulo dado se medem pelo mesmo número.

Acontece entretanto que, nem sempre, as medidas dos lados, nessa unidade u, serão números inteiros. O teorema do artigo prova que essas medidas só serão, as três, dadas por números inteiros se o triângulo de partida for semelhante a um daqueles 5 triângulos encontrados. Nesse contexto, eles são especiais.

A demonstração feita por Heron

Mário Dalcin

Quando pequeno, li sobre Heron de Alexandria em uma enciclopédia biográfica que havia em casa. Fiquei sabendo que ele viveu no século II d.C. na cidade de Alexandria, obviamente, que foi engenheiro e matemático. Não me lembro que outras coisas mais havia sobre Heron, mas ficou gravada em minha memória a fórmula que lá estava para calcular a área de um triângulo:

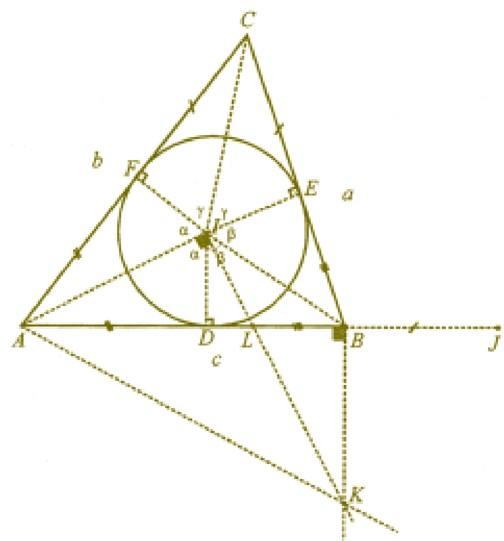
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo p a metade do perímetro do triângulo.

O que me encantou nessa fórmula? Não sei. Talvez por ter uma raiz quadrada, que naqueles dias escolares lhe dava um ar de Matemática superior; ou pelo fato de só usar os lados do triângulo, e não a altura, como na *formulinha* usada na escola.

Anos mais tarde, após ter encontrado várias vezes a fórmula e até depois de ter visto sua demonstração como mero corolário de um cálculo de medianas, continuava intrigado: como Heron a havia demonstrado?

Após ler a resenha publicada em *Livros* da **RPM** 31, comprei o livro *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, e qual não foi minha surpresa ao encontrar na página 205 a menção de que, a **demonstração feita por Heron** (que está em seu livro *A métrica*) estava esquematizada no exercício 6.11 d). Com algumas pequenas modificações, aqui vai ela:



1.
Área ΔABC = áreaΔABI + área ΔIBC + área ΔAIC $= \frac{r}{2}(AB + BC + CA) = rp$.

2. Como $\Delta ADI \equiv \Delta AIF$, $\Delta DBI \equiv \Delta IBE$ e, $\Delta FIC \equiv \Delta IEC$, temos $AD = AF$, $DB = BE$ e $CE = CF$.

3. Seja J o ponto da semi-reta AB tal que $BJ = CE$.

$$AJ = \frac{AD + AF}{2} + \frac{BD + BE}{2} + \frac{CE + CF}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = p.$$

Então $p - c = AJ - AB = BJ$, $p - b = AJ - AC = DB$ e $p - a = AJ - BC = AD$.

4.
i) Seja K o ponto construído como indicado na figura. O quadrilátero $AKBI$ é inscritível numa circunferência de diâmetro AK; logo $\angle AIB + \angle AKB = 180^o$ e, como $\alpha + \beta + y = 180^o$ temos $\angle AIB + \angle CIE = 180^o$, de onde $\angle AKB = \angle CIE = y$.

Então temos $\Delta CBI \approx \Delta AKB$, o que implica $\frac{AB}{BK} = \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r}$.

ii) No triângulo retângulo ΔALI temos $r^2 = DL \cdot AD$ e de $\Delta DLI \approx \Delta BLK$ (verifique)

temos $\frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL}$.

iii) De i) e ii) temos $\frac{AB}{BJ} = \frac{LB}{DL}$, o que implica $\frac{AB + BJ}{BJ} = \frac{LB + DL}{DL}$ ou

$\frac{AJ}{BJ} \cdot \frac{AJ}{AJ} = \frac{DB}{DL} \cdot \frac{AD}{AD}$,

que juntamente com $r^2 = DL \cdot AD$ leva a $AJ^2 \cdot r^2 = BJ \cdot AJ \cdot BD \cdot AD$.

Usando-se as igualdades apresentadas em **3**, obtemos

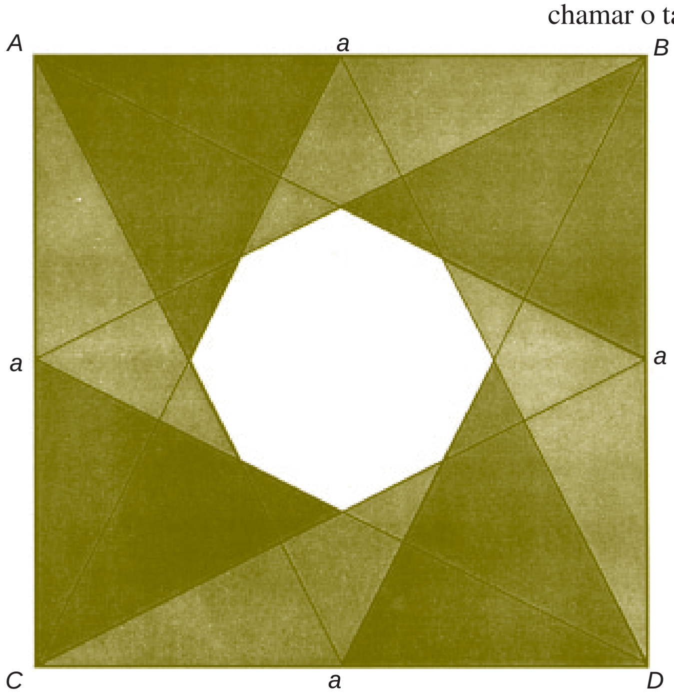
$$p^2r^2 = (p - c)p(p - b)(p - a),$$

que, pela igualdade exibida em **1**, demonstra a fórmula.

Octógono Perverso

Cláudio Arconcher

VOCÊ ACHA QUE O OCTÓGONO CONSTRUÍDO ABAIXO É REGULAR? SIM? POIS É... É POR ISSO QUE É PERVERSO!



Octógono: perverso ou genial?

Comentários enviados por leitores

1. Um leitor não achou o octógono tão perverso assim e notou nele peculiaridades curiosas:

- há simetria em relação às diagonais que contêm o centro do quadrado;
- os 8 lados são iguais e também são iguais os ângulos opostos;
- os triângulos retângulos cujas hipotenusas ligam um vértice do quadrado ao ponto médio de um lado e não têm lados em comum com o quadrado são semelhantes ao triângulo de lados 3, 4 e 5.

2. Outro leitor e colaborador da revista preferiu chamar o tal octógono de genial e não de perverso, pois é possível calcular várias medidas de ângulos e segmentos que se formam, mostrando que o octógono não é regular de dois modos: verificando que seus ângulos internos não são todos congruentes entre si ou constatando que há duas diagonais que passam pelo centro do quadrado e que não são congruentes, uma delas é a metade do lado do quadrado de partida e a outra é a terça parte da diagonal desse quadrado. Sugere, então, um outro problema ao leitor: obter por meio de dobras um octógono regular a partir de uma folha quadrada de papel.

Bom senso, realidade e melhores idéias matemáticas

Nilza Eigenheer Bertoni

Desvendando a Geometria da 7ª Série: Ângulos e Arcos de Círculos

Vários livros de Matemática para a 7ª série que temos examinado afirmam, incondicionalmente, que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente. Apresentam exemplos e exercícios resolvidos onde se diz que o arco subtendido por um ângulo central de x graus mede x graus.

De modo como são colocadas, as definições (às vezes chamadas de axiomas) são destituídas de clareza, e até de bom senso. Transcrevemos, com comentários, algumas dessas afirmações.

Frase 1

"A medida de um arco menor de circunferência é, por definição, a medida do ângulo central compreendido entre seus lados e vice-versa."

Poderíamos então concluir que dado um ângulo central de 45º, o arco correspondente mede também 45º, já do "vice-versa" concluiríamos que, se um arco mede 3 cm, o ângulo central associado também mediria 3 cm (!).

Aliás, exatamente a essa interpretação nos conduz um outro autor:

Frase 2

"A medida de um ângulo central é igual à medida do arco de circunferência compreendido entre seus lados."

Ora, como a única medida de arcos conhecida até então era a medida dos seus comprimentos (feita a partir do estabelecimento de uma relação entre o arco e a circunferência total, de comprimento $2\pi R$), a definição acima nos leva a pensar em atribuir a ângulos centrais a medida dos arcos compreendidos e teríamos, por exemplo, ângulos com πR, unidades de comprimento.

O primeiro autor sugeria ainda, no texto, que os alunos poderiam ter concluído a definição dada, com auxílio de transferidor.

Mas os alunos devem entender o transferidor como um instrumento que lhes permite ver quantos ângulos de 1 grau cabem no ângulo a ser medido; em nenhum momento foram ensinados a medir arcos com auxílio do transferidor.

Um terceiro autor afirma que:

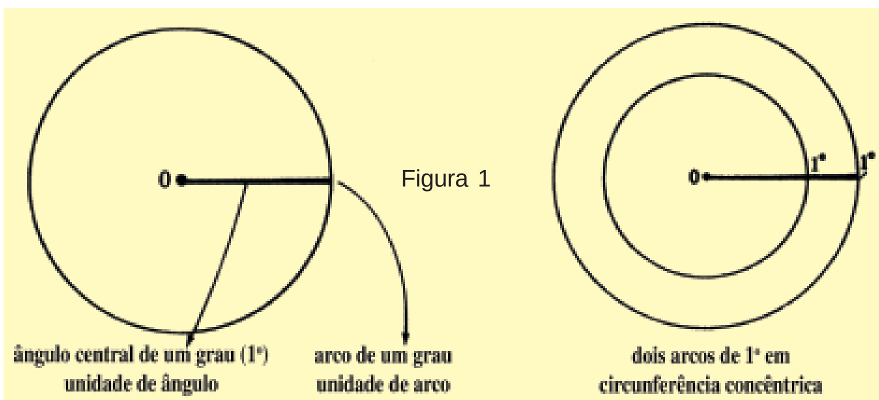


Figura 1

Logo de início as figuras nos causam estranheza: lá estão 2 arcos nitidamente diferentes, ambos unitários. A unidade é ambígua?

Poderíamos neste caso solicitar arame de um vendedor para fazer um arco de 1º, e ele tanto nos poderia dar 1 mm de arame como milhares de quilômetros, e estaria certo, em qualquer caso.

Por outro lado, as definições levam também ao seguinte: arcos de comprimentos iguais poderão ter medidas, em graus, distintas.

Frase 3

"A medida de um ângulo central é igual à medida do arco correspondente, na unidade graus."

Como aparentemente está definido a primeira (medida de ângulo) supondo conhecida a segunda (medida do arco), e não há informação prévia de como este poderia ser medido em graus, a frase dá imagem a dúvidas.

Finalmente num quarto autor encontramos a frase seguinte, juntamente com as ilustrações e legendas da Figura 1.

Frase 4:

"A unidade de arco (ou arco unitário) é o arco determinado na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo)."

Na Figura 2 o arco *AB* mede um quarto do comprimento total da circunferência, isto é

$$\frac{2\pi R}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57 \text{ cm.}$$

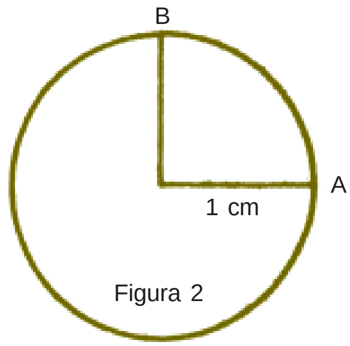


Figura 2

Na Figura 3 o arco *CD* mede um oitavo do comprimento total da circunferências,isto é,

$$\frac{2\pi R}{8} = \frac{2\pi \times 2}{8} = \frac{\pi}{2} \cong 1.57 \text{ cm.}$$

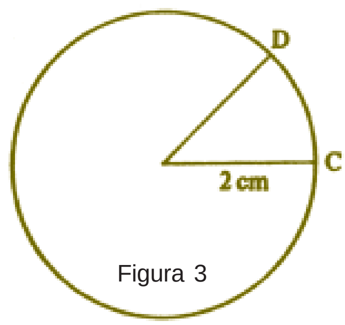


Figura 3

Embora tenham comprimentos iguais, as definições apresentadas nos permitem dizer que a medida do primeiro, em graus, é 90º, e a do segundo, 45º. Outro exemplo insólito é o da Figura 4, onde, dado o ângulo $\hat{P}$ inscrito na circunferência maior, pode-se concluir, segundo os autores, que $m(CD) = 40^\circ$ e $m(AB) = 80^\circ$.

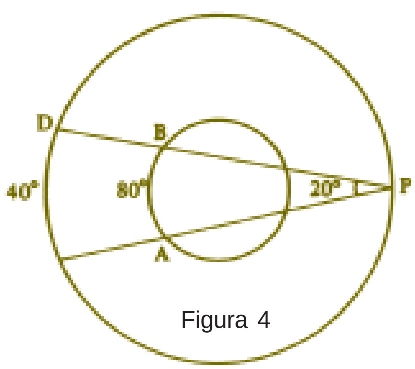


Figura 4

As definições como vimos, conturbam bastante a clareza das idéias essenciais em Matemática, que sempre desejamos passar aos nossos alunos.

Para começar a desanuviar a confusão criada, lembramos que as frases estariam mais corretas se os autores houvessem frisado que iam introduzir a *medida angular* de um arco. Pelo menos a Frase 1 ficaria correta se começasse por: “A medida angular de um arco...”, suprimindo ao final a palavra *vice-versa*.

Poderíamos então ter, em circunferências concêntricas, arcos diferentes com a mesma medida angular e deveríamos chamar a atenção dos alunos para isto. Infelizmente os livros são obscuros e não esclarecem a diferença entre medida angular de um arco e seu comprimento. Consideramos essencial tornar claros esses pontos, quando os alunos estão iniciando o aprendizado dessa teoria.

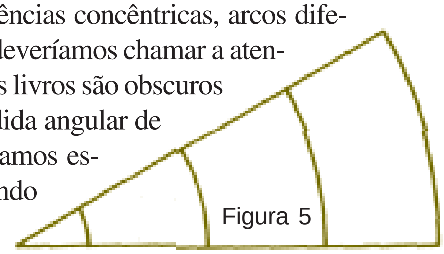


Figura 5

Na verdade, a propriedade mais natural a ser medida num arco é o seu comprimento. Se propusermos aos alunos que determinem a medida de um arco semicircular, a ser feito sobre uma porta de 90 cm de largura, esperamos que (usando de bom senso e realidade) eles nos respondam algo como 1,41 m, e não 180 graus. Analogamente, ao ler a questão “Qual é a medida do arco que é igual à quinta parte da circunferência?”, um aluno de bom senso responderia

$$\frac{2\pi R}{5} \,.$$

Não obstante, segundo os autores, a resposta correta seria 72º.

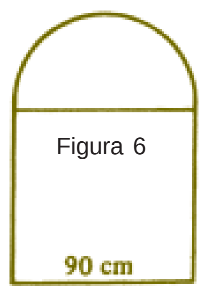


Figura 6

No caso de introduzir-se medida angular de um arco de circunferência, é necessário frisar que não se está absolutamente medindo o comprimento do arco, mas outra propriedade associada a ele, a saber, a abertura do ângulo *central* correspondente.

Visto que o conceito de medida angular de um arco requer cuidados ao ser dado, para que sejam transmitidas as verdadeiras idéias matemáticas envolvidas, ocorre-nos que devemos refletir sobre a necessidade ou urgência de darmos este conceito nesta fase de currículo.

Seria tal conceito imprescindível para o prosseguimento da teoria? Um dos primeiros usos que os autores fazem da definição é ao enunciarem a propriedade do ângulo inscrito numa circunferência.

Frase 1’

A medida de ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco interceptado pelos seus lados.

Frase 2’

A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente.

Frase 4’

A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

Ou, segundo os autores, a situação pode ser ilustrada pela Figura 7, de difícil entendimento pelos alunos.

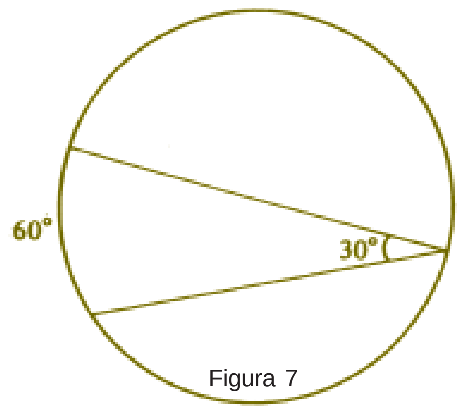


Figura 7

Na verdade, o uso da medida de arco feita pelos autores leva a uma fictícia simplificação da linguagem, que ao final camufla os fatos matemáticos envolvidos. O que os autores teriam a dizer, de modo claro, seria o seguinte: “A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente”, o que dispensaria totalmente o conceito de medida angular de arco.

(É curioso notar que o autor 2 do problema enuncia desse modo, mas em seguida acha necessário reenunciar em termos da medida de arco).

Costumamos explorar a propriedade num “Geoquadro circular”. Trata-se de uma placa de madeira, na qual desenhamos um círculo dividido em 24 ângulos de 15°. No centro, e em cada ponto divisório dos arcos são colocados pregos, enterrados apenas até a metade (Figura 8). Podemos marcar, com elásticos presos aos pregos, ângulos inscritos a 60°, 45°, 30°, com auxílio dos esquadros. A medida do ângulo central correspondente poderá nestes casos, ser lida diretamente, contando-se o número de ângulos de 15° contidos no ângulo central. A situação mostrada no geoquadro torna-se bastante clara e elucidativa, como mostra a Figura 8.

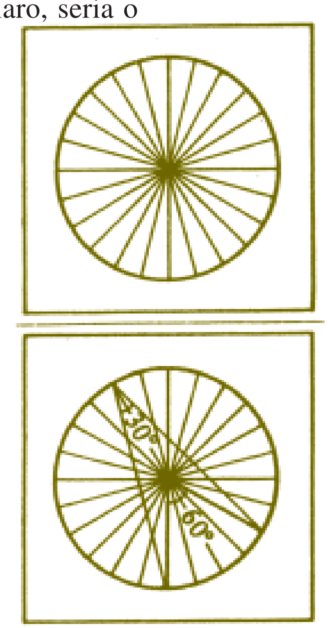
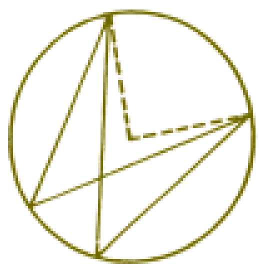


Figura 8

Quatro corolários imediatos são os que damos a seguir, ilustrados pelas Figuras 9, 10, 11 e 12:

1) dois ângulos inscritos numa circunferência, que determinam sobre ela arcos iguais, são iguais (ambos valem a metade do mesmo ângulo central; ou de ângulos centrais iguais);



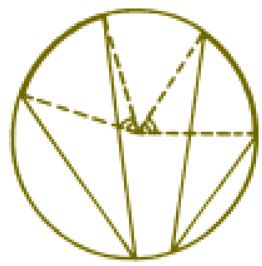


Figura 9

2) um ângulo inscrito numa circunferência, cujos lados encontram a mesma nos pontos extremos de um diâmetro, é reto (a Figura mostra que, no caso, o ângulo central mede 180º);

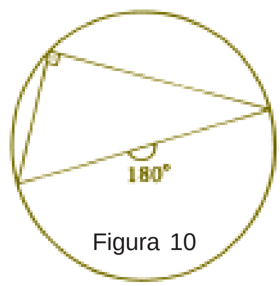


Figura 10

3) duas cordas que se cruzam determinam triângulos semelhantes. De fato, pelo Corolário 1, os ângulos inscritos sombreados são iguais, há 2 ângulos opostos pelo vértice, logo $\hat{A}$ e $\hat{B}$ também são iguais; aliás poderíamos de partida ter notado que $\hat{A} = \hat{B}$ também pelo corolário 1;

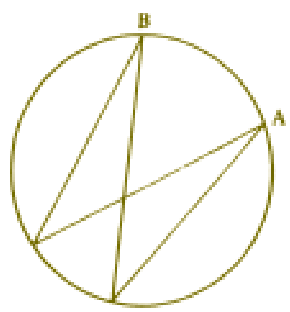


Figura 11

4) num quadrilátero inscrito num círculo, ângulos internos opostos são suplementares. O ângulo interno $\hat{A}$ é igual à metade do ângulo $\hat{E}$, o ângulo interno $\hat{C}$ é igual à metade do ângulo $\hat{F}$, logo

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\hat{E}}{2} + \frac{(360 - \hat{E})}{2} = 180^\circ \cdot$$

Estes são os fatos fundamentais relacionados à propriedade citada, e que os alunos devem conhecer de modo claro e sedimentado. Permitem a resolução de um número grande de problemas interessantes.

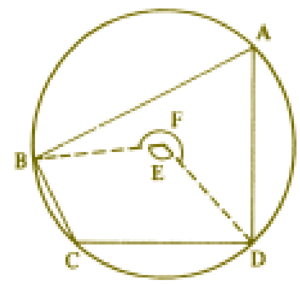


Figura 12

Há outros dois resultados, que também são conseqüências quase imediatas do Teorema do Ângulo Inscrito. Referem-se a ângulos internos ou externos aos círculos, que valem "a semi-soma ou a semi-diferença dos arcos". Não são tão importantes que mereçam destaque especial, e introduzi-los nesta fase é dar ênfase a detalhes. Há livros que mencionam inclusive nomes para os ângulos em questão: "ângulo excêntrico interior" e "ângulo excêntrico exterior", num evidente exagero de terminologia. Somos de opinião que a maturidade dos alunos em aplicações do Teorema do Ângulo Inscrito os levará a resolverem de modo natural, fundamentados em argumentos geométricos, os problemas em que aparecem tais ângulos. Mentalizar mecanicamente esses resultados na 7ª série é contraproducente à evolução do amadurecimento geométrico dos alunos. Não devemos sobrecarregá-los com fórmulas e resultados secundários, e solicitar deles mera aplicação imediata dos mesmos, num processo que envolve mais memória do que raciocínio.

Em resumo, deixamos algumas recomendações aos professores de 7ª série, que desejam para seus alunos o aprendizado desses fatos geométricos que, além de claro, permaneça para além das provas.

Círculos – Ângulos Inscritos

1) Faça seu aluno entender claramente o que é um ângulo inscrito, o que é um ângulo central, e quando um é correspondente do outro.

2) Ignore o conceito de medida de um arco em graus.

3) Faça-os certificarem-se experimentalmente de que: "O ângulo inscrito num círculo é igual à metade do ângulo central correspondente". Este é um resultado fundamental. Esteja certo de que seus alunos o dominam.

4) Conseqüência imediata: Ângulos inscritos que determinam arcos iguais são iguais.

5) Lembre e use muito o fato de que o ângulo que corta a circunferência nas extremidades de um diâmetro mede 90º (vale a recíproca).

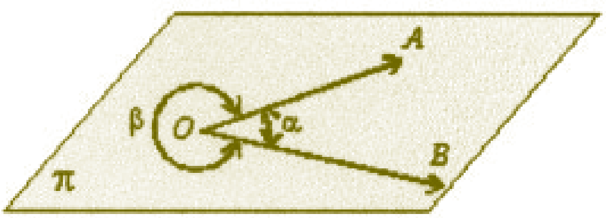
6) Outra conseqüência: cordas que se cruzam determinam triângulos semelhantes.

O conceito de ângulo

Cláudio Arconcher

O Introdução

A **RPM** recebeu, há tempos, um artigo do Prof. Scipione Di Pierro Netto, abordando o conceito de ângulo. Ao ser apreciado pelo Comitê Editorial veio à tona um problema que nós, professores de Matemática, enfrentamos com freqüência: é melhor definir ângulo como uma região do plano, ou como uma reunião de duas semi-retas? Neste número apresentamos uma defesa do conceito de ângulo como uma região de um plano e agradecemos ao Prof. Scipione por ter levantado o problema.



Definição

Considere duas semi-retas de mesma origem, não opostas, contidas num plano π. Elas separam o plano π em duas regiões, uma convexa que denominamos **ângulo convexo**, outra côncava que denominamos **ângulo côncavo**.

Dizemos que as semi-retas *OA* e *OB* são os lados do ângulo e fazem parte dele.

Se houver ambigüidade na identificação do ângulo pela notação tradicional $A\hat{O}B$, devemos providenciar nomes exclusivos para cada um deles, α e β como na figura, ou especificar de qual dos ângulos estamos falando.

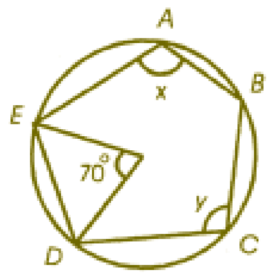
Caso as semi-retas sejam opostas, teremos o plano dividido em dois semi-planos. Denomina mos cada um deles de *ângulo raso*. Se as semi-retas são coincidentes, dizemos que temos um par de ângulos: um *ângulo nulo* que se reduz a semi-reta e um *ângulo de uma volta* que é o plano todo. Aqui deve-se notar a existência dos lados coincidentes. Em todos os casos o ponto O é o vértice do ângulo.

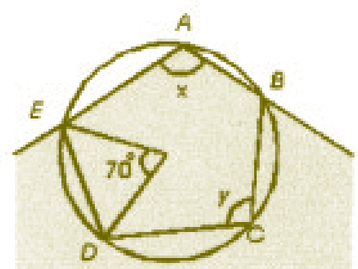
Em seguida atribui-se *medida* ao ângulo. Define-se então o grau sexagesimal. Ângulos convexos apresentam medidas menores do que 180º; ângulos côncavos, medidas maiores do que 180º. Ao ângulo raso atribui-se 180º, ao ângulo nulo, 0º e ao ângulo de uma volta, 360º.

Muitas são as situações em sala de aula nas quais o conceito de ângulo como região do plano facilita o entendimento. Vejamos dois casos:

Exemplo 1

Na figura abaixo temos um pentágono inscrito na circunferência. Determine o valor da soma $x + y$.



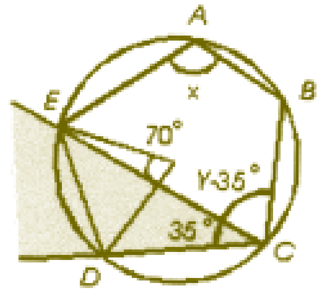


O aluno deve reconhecer os ângulos de medidas x e y como ângulos inscritos e lembrar-se do teorema que relaciona o ângulo inscrito com o ângulo central correspondente. Muitos estudantes ficam em dúvida no momento de identificar o ângulo central correspondente ao ângulo de medida x. Quando podemos dizer que o ângulo central correspondente é aquele cujo arco está "dentro" do ângulo inscrito (o que é possível por ser uma região plana), conseguimos melhorar o entendimento.

Superado esse ponto, podemos escrever:

$$2x = (2y - 70^\circ) = 360^\circ \text{ e concluir que } x + y = 215^\circ .$$

Uma solução mais criativa para esse problema é apresentada na figura a seguir:



Notando o quadrilátero inscrito *ABCE* e lembrando que seus ângulos opostos são suplementares, temos:

$$x + (y - 35^o) = 180^o \text{ ou}$$
$$x + y = 215^o.$$

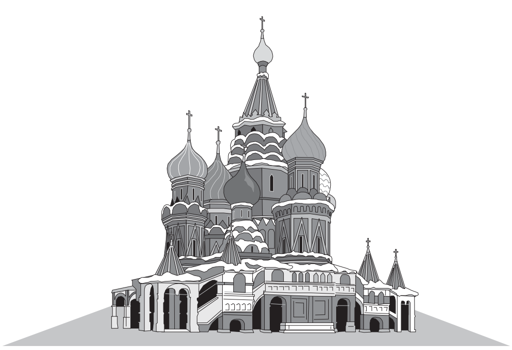
Nessa solução notamos, novamente, a dificuldade que muitos alunos têm em associar ao ângulo inscrito $D\hat{C}E$ o ângulo central correspondente, que tem medida 70º, e obter assim a medida 35º do ângulo $D\hat{C}E$. Vale repetir que o ângulo central é aquele cujo arco está “dentro” do ângulo inscrito.

Exemplo 2

Consideremos o estudo do cone circular reto na Geometria Métrica. É extremamente educativo nesse estudo produzir modelos dos sólidos. Nesse caso a planificação da superfície lateral do cone é um setor circular. Como devemos apresentar várias formas para o cone, é interessante construir um “chapéu chinês”. A materialidade do ângulo côncavo aqui é, então, decisiva para o entendimento. Novamente temos a relevância do ângulo como região plana.

Trigonometria e um antigo problema de otimização

José Luiz Pastore Mello



Introdução

Apresentamos, neste artigo, um problema trigonométrico de maximização enunciado no século XV e uma sugestão de aplicação em sala de aula. As atividades descritas permitem que o professor trabalhe a trigonometria de forma menos técnica e mais contextualizada, de acordo com a recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino médio.

Regiomontanus e a trigonometria

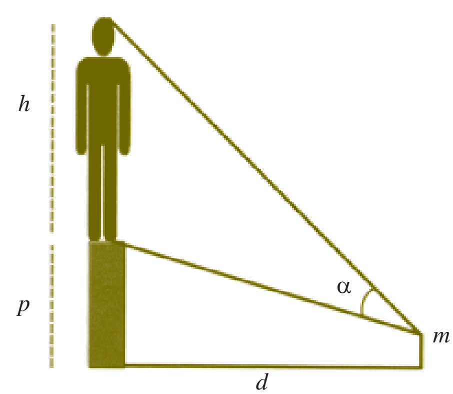
A cidade de Köningsberg, na Prússia (atual Rússia), é conhecida na Matemática devido ao famoso problema das pontes, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Outro acontecimento importante que marca a vida da cidade, cujo nome significa Montanha do Rei, é o fato de ela ter sido o local de nascimento de Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como *Regiomontanus*, uma latinização do nome de sua cidade natal.

Regiomontanus realizou diversos estudos nas áreas de Astronomia, Geometria e Trigonometria. Em seu livro mais famoso, *De Triangulus Omnimodes,* escrito em 1464 e impresso apenas em 1533, Regiomontanus apresenta uma visão moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas. É curioso notar que, mesmo tendo sido escrito antes do conceito de notação decimal, as tabelas trigonométricas contidas no livro não apresentam frações devido à utilização de um círculo e raio 100 000 000 de unidades, o que produzia apenas valores inteiros para as aproximações utilizadas.

A importância dos conhecimentos em Astronomia de Regiomontanus fez com que ele fosse convidado pelo Papa Sixto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais acurado do que o que vinha sendo usado pela Igreja. Após a realização do trabalho a gratidão do Papa foi tal, que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, Regiomontanus faleceu, tendo sido anunciada como causa de sua morte o flagelo de uma peste. Existem especulações de que ele tenha sido envenenado por alguma pessoa descontente com a alta influência de um "não-italiano" sobre o Papa e a Igreja romana. Alguns historiadores especulam ainda que, se não tivesse falecido tão cedo, talvez tivesse condições de realizar uma moderna compreensão do sistema solar, como a feita por Copérnico 100 anos depois.

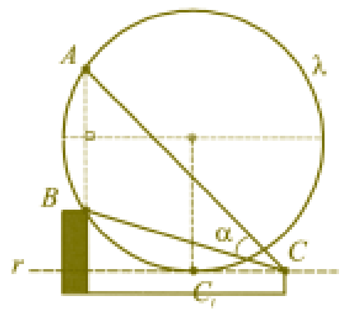
Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, destacamos um de 1471, como o primeiro problema de extremos encontrado na história da Matemática desde a antiguidade. O problema (**NR**) é o seguinte:

Suponha uma estátua de altura h *sobre um pedestal de altura* p. *Um homem de altura* m $(m < p)$ *enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo a, que varia de acordo com a distância* d *entre o homem e a base do pedestal. Determinar* d *para que o ângulo de visão* α *seja o maior possível.*



Uma solução engenhosa para o problema

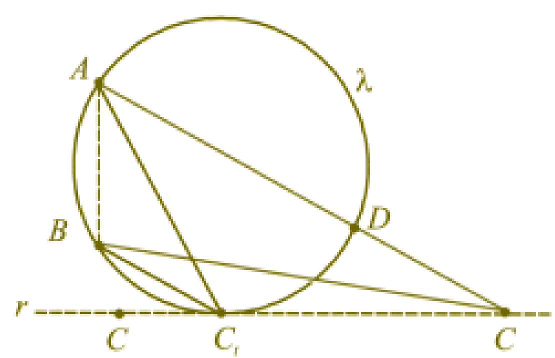
Apesar de o problema poder ser resolvido com as ferramentas do Cálculo, existe uma solução simples e engenhosa que apresentaremos a seguir.



Inicialmente marcamos na figura os pontos A, B e C, representando respectivamente o topo da estátua, o pé da estátua e os olhos do observador. Em seguida traçamos a reta r que passa por C e é paralela à linha do chão. Traçamos então a única circunferência λ, com centro na mediatriz do segmento AB, que passa pelos pontos A e B e tangencia a reta r. Marcamos, na figura, C_t como o ponto de tangência.

Se C percorrer livremente a reta r, qualquer possibilidade para o ângulo de visão α será dada por uma certa localização de C em r. Provaremos que α assume o maior valor possível quando C coincide com C_t. Para isso, mostraremos que medida é maior que medida para qualquer posição de C diferente de C_t.

Se D é o ponto de encontro da reta AC com a circunferência λ, temos



Por outro lado, no triângulo BCD, temos $\alpha + \lambda + 180^o - \beta = 180^o$. Logo $\beta = \alpha + \lambda$, implicando $\beta > \alpha$.

Uma vez verificado que AC_tB é o ângulo de máximo campo visual, determinaremos agora a distância d, entre observador e a base do pedestal, para que esse ângulo seja atingido.

Se Q é o ponto de interceção da reta AB com r, sendo as retas r e AB, respectivamente, tangente e secante a λ, aplicando potência no ponto Q, encontraremos a distância d procurada:

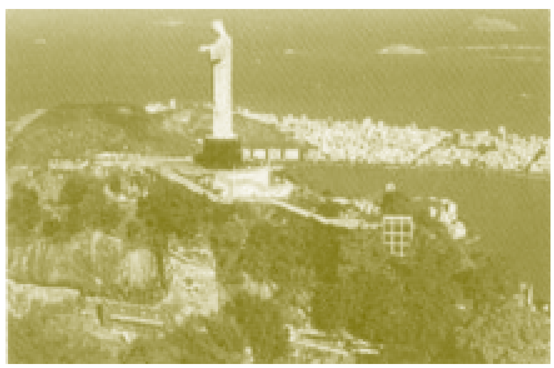
$$\overline{QC_t}^2 = \overline{QB} \cdot \overline{QA}$$

ou

$$d^2 = (p - m)(p - m + h).$$

Se a altura m do observador for pouco significativa em relação à altura da estátua e do pedestal, podemos simplificar a fórmula para $d = \sqrt{p(p+h)}$.

Uma aplicação



Em outubro de 1931, após cinco anos de construção, foi inaugurado no alto do morro do Corcovado o cartão de visitas do Rio de Janeiro, a estátua do Cristo Redentor. A altura total da estátua é 30 m, seu pedestal mede 8 m, e admitiremos um observador com 1,70 m de altura.

A que distância esse observador deve ficar da base do pedestal do Cristo Redentor para que o seu ângulo de visão seja o maior possível?

Usando a fórmula acima, obtemos:

$d = \sqrt{(8-1{,}7)(8-1{,}7+30)}$, o que resulta aproximadamente 15 m.

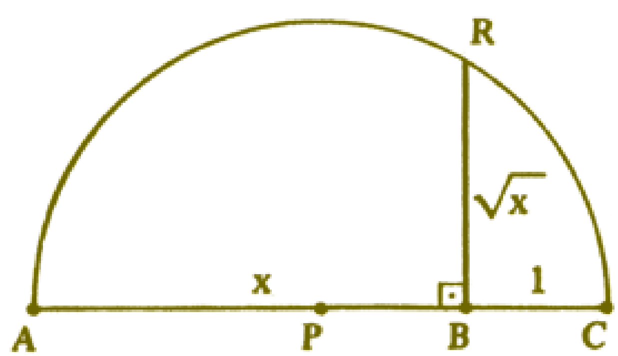
Método geométrico para o cálculo raiz quadrada

Francisco Rocha Fontes Neto

Seja X o número do qual queremos extrair a raiz quadrada. Numa reta, tomemos os pontos A, B e C tais que $AB = X$ e $BC = 1$.

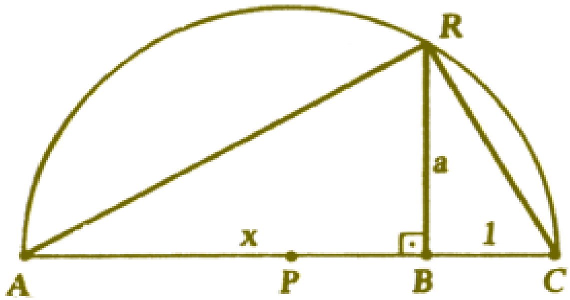
Seja P o ponto médio do segmento $AC(AP \equiv PC)$.

Com centro em P, tracemos um semi-círculo de raio AP e, por B, tracemos uma perpendicular à reta que contém AC até interceptar o semi-círculo, determinando assim o ponto R.



O segmento BR nada mais é do que a raiz quadrada do número X em questão.

Demonstração geométrica do método



Como o triângulo *ACR* é retângulo, temos que o produto das projeções dos catetos *AR* e *RC* sobre a hipotenusa *AC* é igual ao quadrado da altura *RB* relativa à hipotenusa, logo:

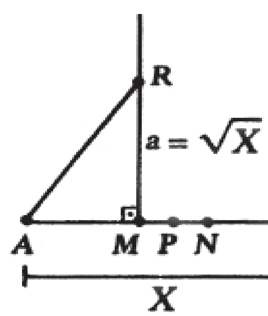
$$a^2 = X \cdot 1 \therefore \boxed{a = \sqrt{X}}$$

O processo seguinte usa somente o teorema de Pitágoras e é proposto pelo autor: seja $X > 1$; num segmento *AB* de comprimento *X* marquemos o ponto médio *P* e os pontos *M* e *N* tais que $MP = PN$ e $MN = 1$.

Por *M*, tracemos uma perpendicular à reta que contém *AB* e com centro no ponto *A* e abertura *AN* determinamos na perpendicular traçada por *M* o ponto *R*.

O segmento *RM* é a raiz quadrada de *X*.

Demonstração algébrica do método



AP = X/2
MN = 1
AM = (X - 1)/2
AR ≡ AN = (X + 1)/2
RM = a

Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{X-1}{2}\right)^2$

que desenvolvido dará $a = \sqrt{X}$

OBS.: Se $X < 1$, mudará apenas a figura. A forma da construção, entretanto, será mantida.

Como abrir um túnel se você sabe Geometria

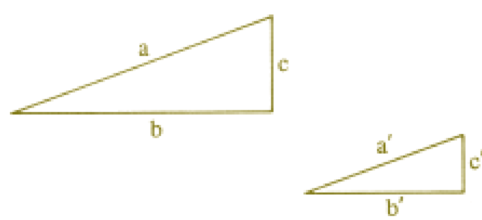
Euclides Rosa

A ilha de Samos, que ainda pertence à Grécia, fica a menos de 2 quilômetros da Costa da Turquia. Há 2.500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. Samos passou à História por ser a terra natal de Pitágoras, mas não é dele que vamos falar. O herói do nosso episódio nem ao menos era matemático. Seu nome era Eupalinos e, nos dias atuais, seria chamado de engenheiro. Ele será focalizado aqui por ter sabido usar, com bastante sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido pelos leitores da Revista do Professor de Matemática por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O teorema de Geometria usado por Eupalinos foi o seguinte:

Se *dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*



Na figura anterior, se $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ então

Ëab = Ë$a'b'$ e Ëac = Ë$a'c'$.

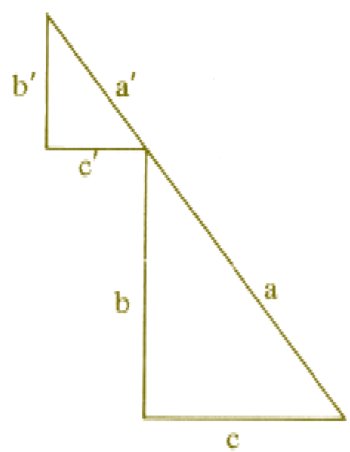
Como se sabe, este é um caso particular de semelhança de triângulos. [Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais.]

Para sermos exatos, Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim uma sua conseqüência imediata, que enunciaremos agora:

Sejam abc e a'b'c' triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos b e c' são perpendiculares e, além disso, tem-se

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

então as hipotenusas a e a' estão em linha reta.



A afirmação acima decorre imediatamente da anterior, pois, a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Retomemos nossa história. Ela se passa em Samos, ano 530 a.C. O poderoso tirano Polícrates se preocupava com o abastecimento de água da cidade. Havia fontes abundantes na ilha, mas ficavam do outro lado do monte Castro; o acesso a elas era muito difícil para os habitantes da cidade. Decidiu-se abrir um túnel. A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que chamaremos de *A* e *B* respectivamente. Cavar a montanha não seria árduo, pois a rocha era calcárea e não faltavam operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto *A* e, cavando, chegar ao ponto *B* sem se perder no caminho.

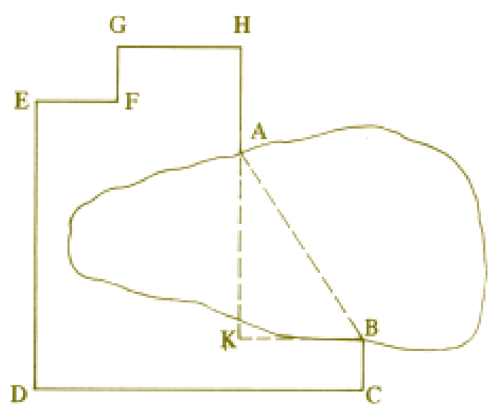
Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática. Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade, propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar simultaneamente nos pontos *A* e *B*, encontrando-se as duas turmas no meio do túnel!

Disse e fez. O túnel, construído há 25 séculos, é mencionado pelo historiador grego Heródoto. Em 1882, arqueólogos alemães, escavando na ilha de Samos, o encontraram. Ele tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

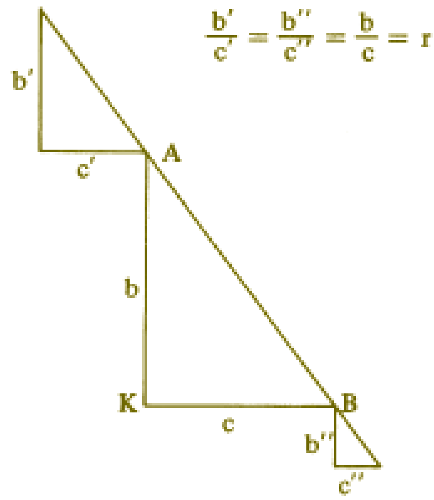
Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de *A* e *B*, traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte, *A* é o ponto de entrada e *B* é a saída do túnel.

A partir do ponto *B* fixa-se uma direção arbitrária *BC* e, caminhando ao longo de uma poligonal *BCDEFGHA*, na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto *A*, tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus.)



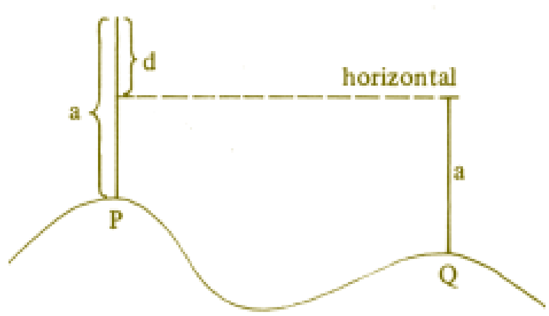
Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos *AK* e *KB* do triângulo retângulo *AKB* no qual *AB* é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada. Calcula-se então a razão $r = AK/KB$. A partir dos pontos *A* e *B*, constroem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão *r* entre os catetos do triângulo *AKB*.



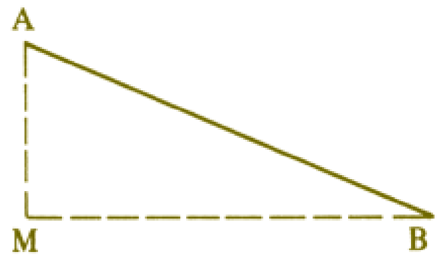
Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos *A* e *B*, na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos.

Isto resolve o problema se os pontos *A* e *B* estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal, e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral, *A* e *B* não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que *B* seja mais baixo, e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular *d* = diferença de nível entre *A* e *B*. Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal *BCDEFGHA*, a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.



Tendo *d*, consideramos o triângulo retângulo *AMB*, no qual o cateto *AM* é vertical e tem comprimento *d.* O comprimento da hipotenusa *AB* se determina pelo teorema de Pitágoras (a partir dos catetos do triângulo *AKB*).



A razão $AM/AB = s$ diz como se deve controlar a inclinação da escavação: cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo do túnel, o nível deve baixar s unidades.

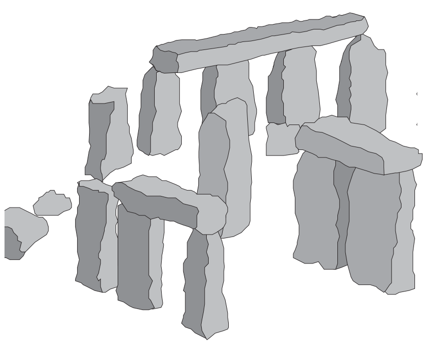
O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

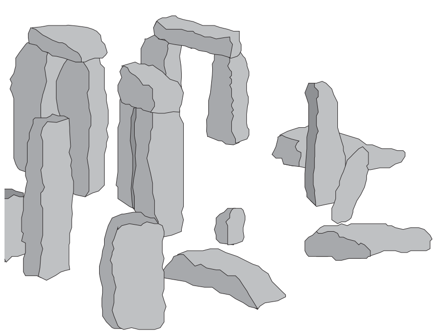
Honestamente, devemos esclarecer que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Isto seria esperar demais da precisão dos instrumentos então existentes. Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvios insignificantes convenhamos. Além disso, esse erro tem dois aspectos interessantes. Em primeiro lugar, constitui uma prova de que o túnel foi realmente cavado em duas frentes. Em segundo lugar, a ponta que começou em B chegou mais baixa do que a que começou em A, o que permitiu formar uma pequena cachoeira, sem interromper o fluxo de água de A para B. Isto nos deixa quase certos de que esse erro na vertical está ligado ao cuidado dos construtores em não deixar as pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que causaria um problema desagradável.

Para encerrar, uma pergunta: como sabemos destas coisas? Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes. Um desses livros é sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra. Nele, Heron descreve o processo que expusemos acima. Em seu todo, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, sintetizando o conhecimento da época. Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados anteriormente com propósitos semelhantes, e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas

Mania de Pitágoras

Euclides Rosa





Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e a organizou-as num livro, ao qual chamou *The Pythagorean Proposition* (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* daquele país.

O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos, porque a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, já é um caso particular daquele teorema.

Como sabemos, o enunciado do Teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Se *a, b* são as medidas dos catetos e *c* é a medida da hipotenusa, o enunciado acima equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios muito antes dos gregos co nheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como

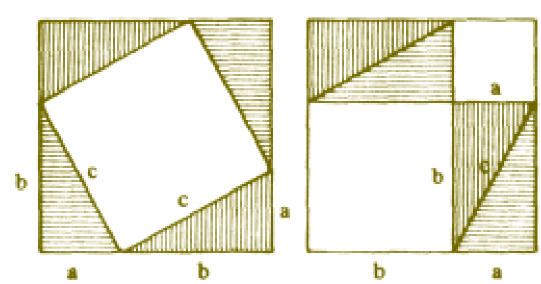
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{e} \quad 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2.$$

O fato de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo era (e ainda é) útil aos agrimensores. Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O que parece certo, todavia, é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. Tudo indica que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo. (Ou alguém da sua Escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico naquele grupo era propriedade comum).

A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos *Elementos* de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo:



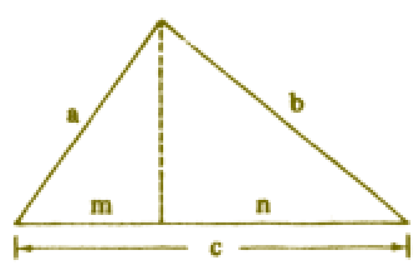
Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b, respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b.

Esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que têm algum interesse especial, por um motivo ou por outro. As quatro primeiras constam da lista do Professor Loomis.

A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: “Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela”. Assim se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando, vem $a^2 + b^2 = c^2$.



O problema do relógio

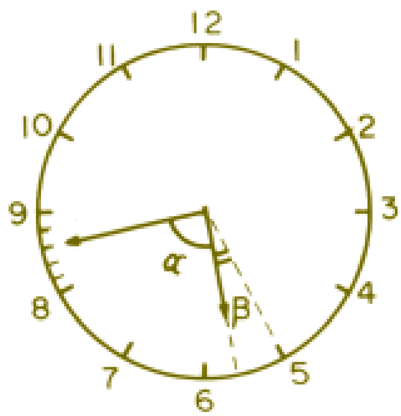
António Leonardo P. Pastor

Resolução simplificada de um problema angular

Um resultado interessante que os alunos usam, e nem sempre sabem justificar, é o seguinte:

O ângulo que o ponteiro das horas de um relógio descreve em m minutos é igual a

$$\frac{m}{2} \text{ graus.}$$



Consideremos, por exemplo, o problema: Calcular o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 5 *h* 43 *mim*.

É usual resolvermos assim: Seja β o ângulo que o ponteiro das horas descreveu desde as 5 horas até 5 *h* 43 *min.* Ora, o mostrador do relógio é dividido em 12 partes iguais de 30° cada. Cada setor de 30° corresponde a 5 minutos e portanto cada minuto corresponde a 6º. Assim, o ângulo $a + \beta$ pode ser determinado por contagem direta, e é igual a $18 \cdot 6 = 108°$.

É fácil verificar que o ângulo *β* é diretamente proporcional ao número *m* de minutos transcorridos, isto é, $\beta = km$. Ora, sabemos que em uma hora o ângulo β descrito pelo ponteiro menor é igual a 30°. Então:

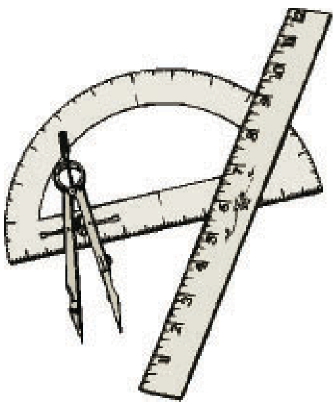
$$30 = k\ .\ 60 \Leftrightarrow k = \frac{30}{60} = 0{,}5\ ,$$

o que mostra que a constante de proporcionalidade

entre as variáveis β e *m* é igual a $\frac{1}{2}$.

Geometria e Astronomia

Geraldo Ávila



1. Considerações preliminares

Freqüentemente, o professor de Matemática se vê em dificuldades diante do aluno que deseja saber "pra que serve" o que está aprendendo, ou porque está estudando este ou aquele tópico. Nem sempre o professor tem uma resposta satisfatória e às vezes até encerra o assunto com uma justificativa nada convincente: "Você precisa aprender isto agora como embasamento para o que vai estudar mais tarde".

Em situações como essa, quem tem razão é o aluno: sua curiosidade por uma justificativa adequada das coisas que lhe são ensinadas é mais do que natural. Ele precisa de respostas certas, que satisfaçam sua curiosidade e estimulem sua mente inquisitiva. Só assim poderá o professor transformar o desinteresse do aluno pela Matemática numa ativa participação no aprendizado.

A Astronomia, que é a mais antiga das ciências, oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, que muito bem respondem ao "pra que serve" do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da Matemática como instrumento da ciência aplicada. Escrevemos sobre algumas dessas questões no primeiro número da **RPM**, onde mostramos como noções simples de semelhança e proporcionalidade permitiram aos sábios da Antiguidade encontrarem métodos de calcular os tamanhos da Terra, do Sol e da Lua e as distâncias entre esses astros. Muitos desses cálculos são acessíveis a alunos de 6ª e 7ª séries e servem como excelente motivação ao estudo de triângulos e círculos.

No presente artigo apresentaremos outros cálculos simples que nos dão os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias ao Sol em termos da distância da Terra ao Sol, cálculos esses que são devidos, originariamente, a Copérnico.

2. O que fez Copérnico

A famosa obra de Nicolau Copérnico (1473-1543) sobre a teoria heliocêntrica do sistema solar foi publicada no ano de sua própria morte. Mas não teve repercussão imediata, embora se revelasse mais tarde como o impulso inicial mais importante para o desenvolvimento científico que persiste até os dias de hoje. Por isso mesmo historiadores da ciência adotam o ano de 1543 como o do início da ciência moderna.

Essa idéia de que o Sol está fixo no espaço e os planetas, inclusive a Terra, giram em torno dele, não era nova no tempo de Copérnico. Ela já havia sido proposta por Aristarco no 3º século a.C, mas não vingou, porque esbarrava em sérias dificuldades – uma das quais é uma objeção muito interessante, aparentemente levantada pela primeira vez por Hiparco, que viveu por volta de 150 a.C. Se a Terra girasse em torno do Sol – dizia Hiparco – a direção em que vemos uma estrela particular deveria variar durante o ano (Figura 1). E Hiparco, um eminente astrônomo, nunca constatara esse fenômeno em suas observações.

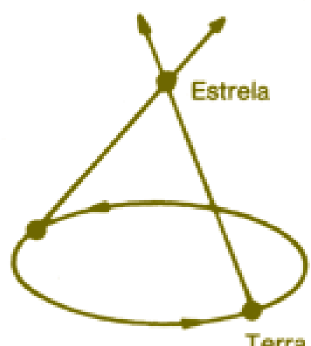


Figura 1

Para bem entender do que estamos falando, imagine um observador olhando fixamente para frente, movimentando a cabeça para a direita e para a esquerda. Ele notará que os objetos diante de si também se movimentam para a esquerda e para direita respectivamente. Os objetos, quanto mais afastados estiverem do observador, menos "se deslocam". Pois bem, era exatamente esse deslocamento que Hiparco esperava das estrelas, se é que a Terra estivesse mesmo dando voltas em torno do Sol. Ao que parece, Hiparco descartava como absurda a idéia de que as estrelas estivessem tão afastadas de nós a ponto de permanecerem praticamente fixas na abóbada celeste.

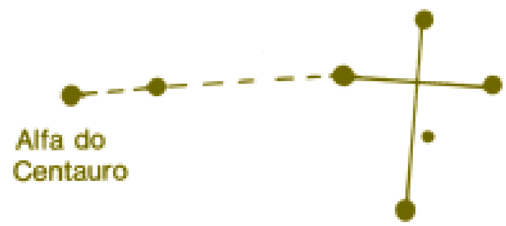


Figura 2

Hoje sabemos que as estrelas efetivamente “se deslocam” ao longo do ano, mas por ângulos ínfimos que sempre escaparam à capacidade de detecção dos instrumentos de Hiparco e de todos os astrônomos até muito recentemente. De fato, esse deslocamento das estrelas, chamado *paralaxe,* só foi medido pela primeira vez pelo astrônomo russo Struve em 1837 e pelo alemão Bessel em 1838. Essas descobertas mostraram que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós, umas mais longe, outras mais perto. A estrela mais próxima é a Alfa Centauro, que é a segunda estrela mais brilhante à esquerda do Cruzeiro do Sul (Figura 2). Ela é, na verdade, um sistema triplo, isto é, são três estrelas agrupadas, das quais a mais próxima de nós está a 4,3 anos-luz* de distância. Ora, o Sol está a 8,3 minutos-luz da Terra, de sorte que

$$\frac{4{,}3 \text{ anos} - \text{luz}}{8{,}3 \text{ minutos} - \text{luz}} =$$

$$= \frac{4{,}3 \times 365 \times 24 \times 60}{8{,}3} = 272\ 000$$

Isto mostra que essa estrela está distante de nós 272 000 vezes mais que o Sol. Assim, se o Sol estivesse a 1 metro de distância da Terra, a estrela mais próxima estaria a 272 km de distância! E Copérnico pensava que as estrelas estivessem 400 vezes mais longe de nós que o Sol...

Se a idéia heliocêntrica já havia ocorrido a Aristarco – chamado “o Copérnico da Antiguidade” – por que então a fama ficou com Copérnico? A explicação é simples: não basta uma hipótese, é preciso elaborar um sistema, construir uma teoria. Das idéias de Aristarco só nos chegaram uma breve referência num dos livros de Arquimedes. Copérnico, por outro lado, deixou-nos um livro – *Sobre as revoluções das esferas celestes* – con

* Um *ano-luz* é a distância percorrida pela luz em um ano.

tendo um estudo que compatibiliza suas idéias com os dados de observação acumulados ao longo de milênios. E nesse arranjo de compatibilização ele teve de introduzir várias modificações em sua idéia original.

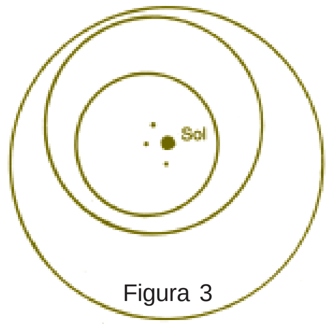


Figura 3

Assim, por exemplo, embora o Sol seja considerado fixo, ele não ocupa os centros das órbitas dos planetas, nem esses centros são coincidentes (Figura 3). Isso foi necessário porque Copérnico mantinha a idéia de que os planetas eram dotados de velocidade uniforme em suas órbitas, o que não condizia com os dados de observação, se as órbitas fossem concêntricas.

Veremos, a seguir, como Copérnico calculou os períodos de revolução do planetas e suas distâncias ao Sol, admitindo órbitas circulares centradas no Sol e movimentos uniformes dos planetas em suas órbitas.

3. Período sideral e período sinódico

Consideremos o planeta Marte, que é um planeta superior, isto é, *cuja* órbita abarca a órbita da Terra. Sejam T e M as posições da Terra e de Marte, respectivamente, quando ambos se encontram de um mesmo lado do Sol S e com ele alinhados (Figura 4). Nesse caso, diz-se que Marte está em *oposição* (ao Sol relativamente à Terra). Quando isso acontece, Marte é visto no zênite à meia-noite; ele nasce quando o Sol se põe e se põe ao nascer do Sol. Por observações feitas, desde a Antiguidade, sabe-se que Marte volta a ficar em oposição a cada 780 dias. Esse é o período de revolução do planeta em torno da Terra, chamado *período sinódico.* O período de revolução do planeta em torno do Sol é chamado *período sideral.*

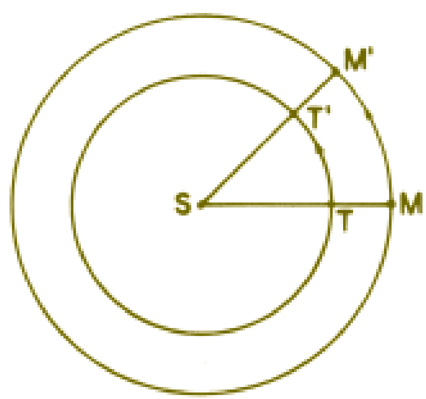


Figura 4

Para calcularmos esse último período, observemos primeiro que a velocidade angular de Marte é menor que a da Terra – um fato que se constata por observações simples. Então, a partir de uma oposição, a Terra vai ganhando dianteira sobre Marte e esse planeta voltará a ficar novamente em oposição quando a dianteira da Terra sobre ele for de 360°, isto é, uma volta completa. Ora, em 780 dias, que é o tempo que decorre entre duas oposições sucessivas, a Terra terá dado duas voltas em torno do Sol e se deslocado ainda, ao longo de um arco $\overset{\frown}{TT'}$ (Figura 4), durante os 50, dias restantes (pois $780 = 2 \times 365 + 50$) Devido à uniformidade do movimento da Terra, teremos a proporção:

$$\frac{\overset{\frown}{TT'}}{50} = \frac{360}{365} \quad TT' = 49^\circ$$

Durante os mesmos 780 dias, Marte completou uma volta em torno do Sol mais o arco $\overset{\frown}{MM'} = \overset{\frown}{TT'} = 49^\circ$. Então, se P é o período sideral de Marte teremos a proporção:

$$\frac{P}{360} = \frac{780}{360 + 49} \quad \therefore P \approx 687 \;\text{ dias}$$

Com esse mesmo raciocínio, Copérnico calculou os períodos siderais dos demais planetas superiores conhecidos em seu tempo, Júpiter e Saturno. Sugerimos que o leitor faça esses cálculos, sabendo que os períodos sinódicos desses planetas são 399 dias e 378 dias, respectivamente. Os períodos siderais correspondentes serão, aproximadamente, 11,8 anos e 29,5 anos, respectivamente.

Um raciocínio parecido permite calcular os períodos siderais dos planetas inferiores, o que faremos no Apêndice adiante.

4. Distância de Marte ao Sol

O conhecimento do período sideral de um planeta superior é essencial para o cálculo de sua distância ao Sol, como veremos agora, no caso de Marte. Imaginemos, como ilustra a Figura 5, que Marte em M esteja em oposição, em a Terra estando em T e o Sol em S. Sabemos, por dados de observação, que 106 dias após, a Terra e Marte se encontrarão em posições 7" e M', respectivamente, tais que $\widehat{ST'M'} = 90^o$. Durante esse tempo, o ângulo α, descrito pela Terra, é de aproximadamente

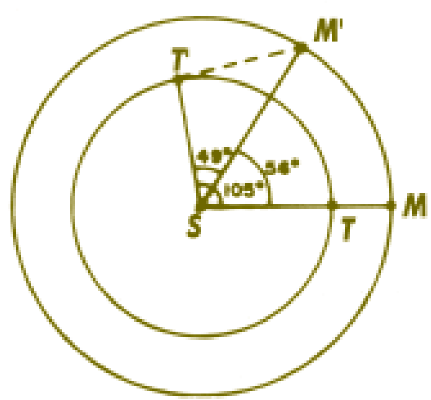


Figura 5

105°, como é fácil calcular (pois α: 106 = 360° : 365). Quanto a Marte, ele terá descrito um ângulo $\beta \approx 56^o$, pois

$$\frac{\beta}{106} = \frac{360^\circ}{687}$$

Como conseqüência, $\widehat{T'SM'} = 105 - 56 = 49^o$. Finalmente, o triângulo retângulo *ST'M'* nos dá:

$$SM' = \frac{ST'}{\cos 49^\circ} \approx \frac{ST'}{0{,}65606} \approx 1{,}5\ ST'$$

Fica assim calculada a distância de Marte ao Sol como 1,5 vezes a distância da Terra ao Sol.

Com o mesmo raciocínio Copérnico calculou as distâncias de Júpiter e Saturno ao Sol. Notamos, mais uma vez, que os cálculos dessas distâncias dependem do conhecimento dos períodos siderais dos planetas, os quais são conceitos ligados à hipótese heliocêntrica de Copérnico. Essas distâncias, portanto, só podiam ser calculadas por Copérnico ou pelos sábios que vieram depois. Pode ser que Aristarco as tenha calculado na Antiguidade, mas disso nada sabemos, porque muitos dos seus escritos não chegaram até nós.

5. As distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol

Contrariamente ao que se passa com os planetas superiores, Marte, Júpiter e Saturno, o cálculo das distâncias de Mercúrio e Vênus ao Sol é muito simples e não depende do conhecimento de seus períodos siderais. Estes são os *planetas inferiores,* assim chamados porque suas órbitas são abarcadas pela órbita da Terra (Figura 6). Em conseqüência, o afastamento angular desses planetas em relação ao Sol, dado pelo ângulo $\widehat{STP}$ e chamado *elongação* do planeta *P,* nunca ultrapassa um certo valor máximo, inferior a 90°. É por isso que Mercúrio e Vênus nunca são visíveis no zênite, por onde eles só podem passar durante o dia. Eles são visíveis ao romper da manhã ou ao cair da noite, já que nunca se afastam muito do Sol.

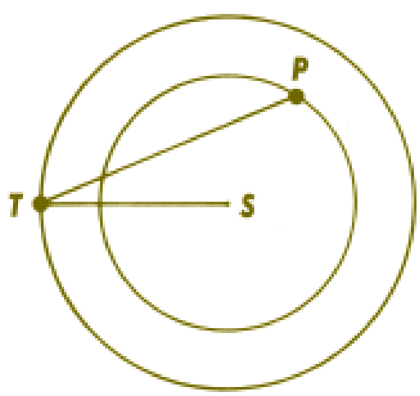


Figura 6

Esses dois planetas se situam em extremos opostos, no que diz respeito à visibilidade: Vênus é muito fácil de ser visto, seja como “estrela matutina” ou “estrela vespertina”; ele é o astro mais conspícuo e mais brilhante no céu, depois do Sol e da Lua. Mercúrio é diferente: estando muito perto do Sol, não é fácil localizá-lo, já que só será visto quase ao raiar do Sol, ou pouco depois do Sol poente, de preferência quando em elongação máxima, que

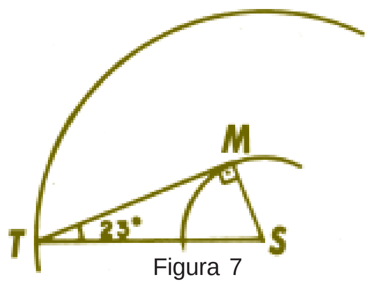


Figura 7

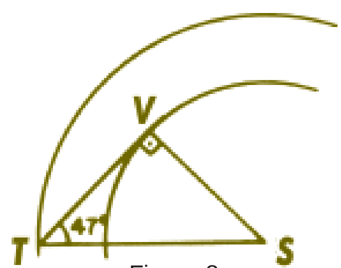


Figura 8

é, em média, de 23°. Quando isso acontece (Figura 7) o triângulo *STM* é retângulo em *M,* logo,

$$SM = ST \cdot \text{sen } 23° \approx 0{,}39\ ST.$$

Vemos assim que Mercúrio dista do Sol 0,39 vezes a distância da Terra ao Sol.

O planeta Vênus, por sua vez, tem elongação que atinge valor máximo de 47°. Portanto, sua distância ao Sol é (Figura 8)

$$SV = ST \cdot \text{sen } 47° \approx 0{,}73\ ST.$$

6. Conclusão

Os cálculos aqui apresentados são uma pequena amostra do trabalho de Copérnico na elaboração de sua teoria heliocêntrica. Usar a teoria para fazer previsões sobre o movimento dos planetas e comparar essas previsões com o que revelavam os dados da observação era o teste necessário para comprovar ou refutar a teoria. Esse teste foi revelando discrepâncias inaceitáveis e exigindo ajustes nas hipóteses. Já mencionamos um desses ajustes, que foi o de deslocar o Sol dos centros das órbitas dos planetas. Mas as modificações, ainda nas mãos de Copérnico, não pararam aí. As mais espetaculares mudanças viriam com Kepler, cerca de 70 anos após a morte de Copérnico. Só então emergiria uma teoria definitiva do sistema solar e que iria encontrar forma acabada na teoria da gravitação de Newton. Pretendemos falar sobre isso num futuro artigo.

Apêndice

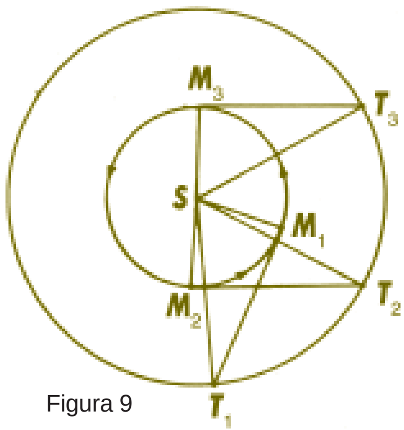


Figura 9

Mostraremos, aqui, como se pode calcular o período sideral de um planeta inferior como Mercúrio. Imaginemos o planeta em elongação máxima a oeste, na posição *M,* quando a Terra se encontra em T_1 (Figura 9). Sabemos, por dados de observação, que dali a 58 dias ele estará novamente em elongação máxima, desta vez ao leste, na posição M_2. Nesses 58 dias a Terra terá coberto um arco terá coberto um arco $\overset{\frown}{T_1T_2} = 57$ como é fácil calcular. Mais 58 dias e voltaremos a ver Mercúrio em elongação máxima a oeste, na posição M_3, com a Terra em T_3. Assim, em 116 dias (58 + 58) a Terra descreverá o arco $\overset{\frown}{T_1T_3} = 2 \times 57^o = 114^o$; e Mércurio descreverá uma volta completa em torno do Sol, mais o arco $\overset{\frown}{M_1M_3} = \overset{\frown}{T_1T_3} = 114^o$, um total de 474º. Se *P* é o período sideral de Mércurio, teremos:

$$\frac{P}{360} = \frac{116}{474} \therefore P \approx 88 \text{ dias.}$$

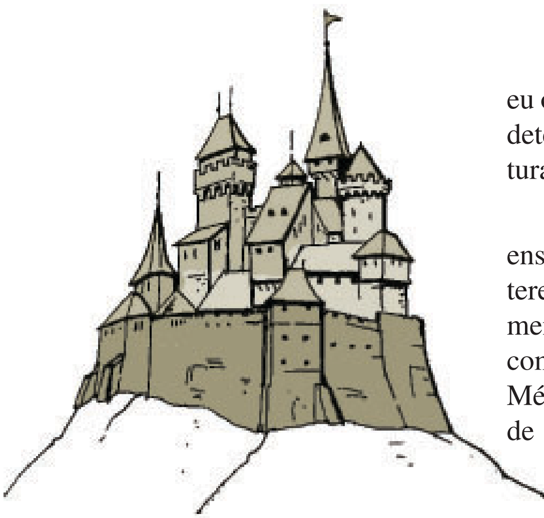
O procedimento é análogo para Vênus, que tem um período sideral de 225 dias.

Capítulo 4

História

Uma aula de Matemática no ano 1000

Ana Catarina P. Hellmeister



Introdução

Estávamos no ano 2000 e uma pergunta que eu ouvia com freqüência era: "Como será que era determinada coisa (a medicina, o teatro, a literatura, o ensino, ...) no ano 1000?"

Vamos tentar dar alguma idéia de como era o ensino da Matemática, que afinal é o que nos interessa, no ano 1000 e pouco antes dele. Obviamente este artigo não é, nem de longe, um texto completo sobre o ensino da Matemática na Idade Média. Tem apenas a intenção de mostrar alguns de seus aspectos interessantes.

I. Rosvita

Vamos começar, talvez por feminismo, apresentando *Rosvita*, uma monja beneditina do convento de Gandersheim, norte de Göttingen, Alemanha, que viveu aproximadamente de 935 a 1002, e é considerada a primeira poetisa da literatura alemã. Ela nasceu, muito provavelmente, em uma família aristocrata, e há registros de que seu nome aparece numa gravura esculpida em madeira como Helena von Rossow.

Rosvita ingressou muito jovem no convento de Gandersheim, famoso centro de estudos, onde seu extraordinário talento encontrou abrigo e cultivo criterioso. Inicialmente Rosvita foi orientada por um professor e posteriormente ficou sob a supervisão de uma sobrinha de Otto I (monarca da época) de nome Gerberg, considerada a mulher modelo de seu tempo. Gerberg, que foi abadessa do convento entre 959 e 1001, tinha um interesse especial pela obra poética de Rosvita, a qual, segundo a abadessa, "contribuiria para o engrandecimento da glória de Deus".

A. Dürer, A monja Rosvita apresenta um livro a Oto I. (Kupferstichkabinett, Berlin)

Não cabe aqui, numa revista para professores de Matemática, discorrer com maiores detalhes sobre a extensa obra literária de Rosvita, uma das mais importantes da Idade Média. Focalizaremos uma em especial, a peça *Sabedoria*, que contém uma aula de Matemática para jovens estudantes, que, pelo seu espírito motivador e bem-humorado, serviria de exemplo (quem diria, uma peça de 1000 anos atrás!) para nós, professores, preocupados com o ensino de Matemática.

Antes de comentar a peça em particular, para melhor ligar Rosvita à Matemática, vamos transcrever um trecho do livro *Cuentos y cuentas de los matematicos*, de Rodriguez Vidal, R. e Rodriguez Rigual, M. C. Editorial Reverte, 1986, p. 137.

"[...]A idade média na Europa não islâmica limita seus conhecimentos de Matemática aos textos comentados de Alexandria e Bizâncio, sem que apareçam indícios de criação original. Desta época são os escritos de Rosvita, monja de um convento alemão, do século X, mais interessantes como literatura e filosofia do que como Matemática. Entretanto demonstram bom conhecimento da *Arithmetica* de Boécio e aludem a questões relativas a números deficientes e perfeitos, citando o 6, 28, 496 e 8128, que eram os números perfeitos conhecidos na sua época. O número perfeito seguinte é 33 550 336 [...]".

Há divergências entre os historiadores sobre se as peças teatrais escritas por Rosvita eram mesmo encenadas ou se seriam meros textos didáticos, nada tendo a ver com o teatro. Lembrando que o ensino na Idade Média era ministrado quase que exclusivamente nos mosteiros, sem dúvida, encenados ou não, os textos de Rosvita tinham claros propósitos didáticos, como é possível perceber em *Sabedoria*, que passamos a transcrever do livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J.

Enredo da peça:

Paixão das santas virgens Fé, Esperança e Caridade. Foram levadas à morte pelos diversos suplícios a que as submeteu o imperador Adriano em presença da sua santa mãe, Sabedoria, que, com seus maternos conselhos, as exortou a suportar os sofrimentos.

Consumado o martírio, sua santa mãe, Sabedoria, tomou de seus corpos e, ungindo-os com bálsamo, deu-lhes sepultura de honra a três milhas de Roma. Ela, por sua vez, no quarto dia, após a oração sacra, enviou também seu espírito ao céu.

Vamos transcrever apenas o trecho da peça que traz a lição de Matemática. Trata-se de um diálogo entre Sabedoria e o imperador Adriano:

Adriano: Dize, que vieste fazer entre nós?

Sabedoria: Nenhuma outra coisa a não ser conhecer a doutrina da verdade para o aprendizado mais pleno da fé que combateis e para consagrar minhas filhas a Cristo.

Adriano: Dize os nomes delas.

Sabedoria: A primeira se chama Fé; a segunda, Esperança; a terceira, Caridade.

Adriano: Quantos anos têm?

Sabedoria: (sussurrando) Agrada-vos, ó filhas, que perturbe com problema aritmético a este tolo?

Fé: Claro, mamãe. Porque nós também ouviremos de bom grado.

Sabedoria: Ó Imperador, se tu perguntas a idade das meninas: Caridade tem por idade um número deficiente que é parmente par; Esperança, também um número deficiente, mas parmente ímpar; e Fé, um número excedente, mas imparmente par.

Adriano: Tal resposta me deixou na mesma: não sei que números são!

Sabedoria: Não admira, pois, tal como respondi, podem ser diversos números e não uma única resposta.

Adriano: Explica de modo mais claro, senão não entendo.

Sabedoria: Caridade já completou 2 olimpíadas; Esperança, 2 lustros; Fé, 3 olimpíadas.

Adriano: E por que o número 8, que é 2 olimpíadas, e o 10, que é 2 lustros, são números deficientes? E por que o 12 que completa 3 olimpíadas se diz número excedente?

Sabedoria: Porque todo número cuja soma de suas partes (isto é, seus divisores) dá menor que esse número chama-se deficiente, como é o caso do 8. Pois os divisores de 8 são: sua metade – 4, sua quarta parte – 2, e sua oitava parte – 1; que somados dão 7. Assim também o 10, cuja metade é 5; sua quinta parte é 2; e sua décima parte, 1. A soma das partes do 10 é, portanto, 8, que é menor que 10. Já o contrário se diz número excedente, como é o caso do 12. Pois sua metade é 6; sua terça parte, 4; a quarta parte, 3; a sexta parte, 2; e a duodécima parte, 1. Somadas as partes dão 16.

Quando porém o número não é maior nem menor que a soma de suas diversas partes, então esse número é chamado número perfeito.

É o caso do 6, cujas partes – 3, 2 e 1 – somadas dão o próprio 6. Do mesmo modo, o 28, 496 e 8128 também são chamados números perfeitos.

Adriano: E quanto aos outros números?

Sabedoria: São todos excedentes ou deficientes.

Adriano: E o que é um número parmente par?

Sabedoria: É o que se pode dividir em duas partes iguais e essas partes em duas iguais, e assim por diante até que não se possa mais dividir por 2 porque se atingiu o 1 indivisível. 8 e 16, por exemplo, e todos que se obtenham a partir da multiplicação por 2 são parmente pares.

Adriano: E o que é parmente ímpar?

Sabedoria: É o que se pode dividir em partes iguais, mas essas partes já não admitem divisão (por 2). É o caso do 10 e de todos os que se obtêm multiplicando um número ímpar por 2. Difere, pois, do tipo de número anterior, porque, naquele caso, o termo menor da divisão é também divisível; neste, só o termo maior é apto para a divisão.

No caso anterior, tanto a denominação como a quantidade são parmente pares; já aqui, se a denominação for par, a quantidade será ímpar; se quantidade for par, a denominação será ímpar.

Adriano: Não sei o que é isto de denominação e quantidade.

Sabedoria: Quando os números estão em "boa ordem", o primeiro se diz menor e o último, maior. Quando, porém, se trata da divisão, denominação é quantas vezes o número se der. Já o que constitui cada parte, é o que chamamos quantidade.

Adriano: E o que é imparmente par?

Sabedoria: É o que – tal como o parmente par – pode ser dividido não só uma vez, mas duas e, por vezes, até mais. No entanto, atinge a indivisibilidade (por 2) sem chegar ao 1.

Adriano: Oh! Que minuciosa e complicada questão surgiu a partir da idade destas menininhas!

Sabedoria: Nisto deve-se louvar a supereminente sabedoria do Criador e a Ciência admirável do Artífice do mundo: pois não só no princípio criou o mundo do nada, dispondo tudo com número, peso e medida; como também nos deu a capacidade de poder dispor de admirável conhecimento das artes liberais até mesmo sobre o suceder-se do tempo e das idades dos homens.

Observem que os números parmente pares são as nossas potências de 2, os parmente ímpares são aqueles que são o dobro de um ímpar; os imparmente pares são os produtos de um ímpar por um parmente par. Denominação e quantidade são os atuais quociente e divisor.

Uma fala de Sabedoria que também chama atenção é sua afirmativa de que todos os números, além de 6, 28, 496 e 8128, são excedentes ou deficientes. Isso mostra o desconhecimento, por parte dos estudiosos da época da obra os *Elementos*, de Euclides, que contém, no livro IX, a demonstração de que qualquer número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito se $2^n - 1$ for primo. Com esse resultado, já para $n = 13$, obtém-se o próximo perfeito que é o número 33 550 336. Essa perda de contato com os ensinamentos de Euclides ficará bastante evidente nos problemas de geometria da seção a seguir.

II. Já existia Educação Matemática no século VIII

Ainda para mostrar que na Idade Média se entendia de ensino de Matemática, voltemos um pouco no tempo, mudando o século e os personagens.

É extremamente interessante a seleção de *Problemas para aguçar a inteligência dos jovens*, encontrada em *Patrologiae cursus completus*, *séries latina*, atribuída a Beda, qualificado de *O Venerável*, que nasceu e viveu na Inglaterra entre 673 e 735, tornando-se um dos maiores professores das escolas religiosas medievais. As soluções apresentadas também estão em *Patrologiae cursus completus*, *séries latina* (ver livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J.) e são algumas atribuídas a Beda, e outras a Alcuíno (séculos VIII-IX).

Os enunciados dos problemas traduzem bem a cultura popular da época, com a pouca Matemática que se conhecia apresentada e ensinada de modo atraente e bem-humorado, privilegiando o desenvolvimento da inteligência dos alunos, como pretendemos fazer hoje. Também já contemplavam a idéia hoje muito difundida de usar situações do cotidiano como motivadores do aprendizado.

Vejamos, então, alguns dos problemas da seleção de Beda, encontrados no livro *Educação, teatro e matemática medievais*, de Lauand, I.J., que certamente surpreenderão muitos dos leitores que acreditam que certos problemas e soluções são de épocas mais recentes.

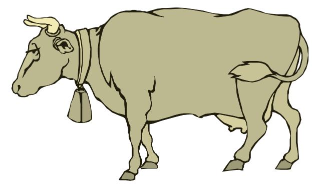
1. Problema do lobo, da cabra e da couve

Certo homem devia passar, de uma a outra margem de um rio, um lobo, uma cabra e um maço de couves. E não pôde encontrar outra embarcação, a não ser uma que só comportava dois entes de cada vez, e ele tinha recebido ordens de transportar ilesa toda a carga. Diga, quem puder, como fez ele a travessia?

Solução

Não apresentamos a solução por ser bem conhecida, pois esse problema é proposto até hoje em diferentes versões. O surpreendente é que seja tão antigo.

2. Problema do boi:



Um boi que está arando todo o dia, quantas pegadas deixa ao fazer o último sulco?

Solução

Nenhuma em absoluto. Pois o boi precede o arado e o arado segue o boi; e, assim, todas as pegadas que o boi faz na terra trabalhada, o arado as apaga. E, deste modo, não se encontrará nenhuma pegada no último sulco.

Este problema mostra bem o espírito brincalhão da época.

3. Problema da escada de 100 degrau.

Numa escada de 100 degraus, no 1º degrau está pousada 1 pomba; no 2º, 2; no 3º, 3; no 4º, 4; no 5º, 5; e assim em todos os degraus até o 100º. Diga, quem puder, quantas pombas há no total?

Solução

Calcule assim: tome a pomba do 1º degrau e some-a às 99 do 99º, o que dá 100. Do mesmo modo, as do 2º com as do 98º somam 100. E assim, degrau por degrau, juntando sempre um de cima com o correspondente de baixo, obterá sempre 100. Some tudo junto com as 50 do 50º degrau e as 100 do 100º degrau que ficaram de fora, e obter-se-á 5 050.

Reconhecem aqui os leitores a famosa solução de Gauss, aos sete anos de idade, respondendo ao problema de somar $1 + 2 + ... + 100$?

4. Problema dos dois caminhantes que viram cegonhas

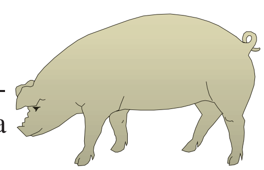
Dois homens andando pelo caminho viram cegonhas e disseram entre si: "Quantas são?" E, contando-as, disseram: Se fossem outras tantas, e ainda outras tantas; e, se somasse metade de um terço do que deu e ainda se acrescentassem mais duas, seriam 100.

Diga, quem puder, quantas cegonhas foram vistas por eles inicialmente?

Solução

28. Pois 28 com 28 e 28 dá 84. Metade de um terço, 14, que somado com 84, dá 98, que, acrescido de 2, resulta 100.

5. Problema do comprador:



Disse certo negociante: "Quero com 100 denários comprar 100 suínos; mas cada porco custa 10 denários, cada leitoa, 5, e cada 2 porquinhos, 1 denário."

Diga, quem entendeu, quantos porcos, leitoas e porquinhos devem ser comprados para que o preço seja exatamente 100 denários, nem mais nem menos?

Solução

9 leitoas e 1 porco custam 55 denários e 80 porquinhos, 40. Já temos 90 suínos por 95 denários. Com os restantes 5 denários compram-se 10 porquinhos.

6. Problema da tela:

Tenho uma tela de 100 cúbitos de comprimento e de 80 de largura. Quero daí fazer telinhas de 5 por 4.

Diga pois, ó sabido, quantas telinhas podem-se fazer?

Solução

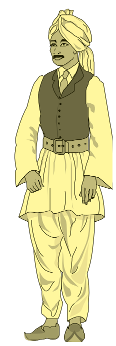
De 400, 5 é a octogésima parte e 4, a centésima parte. Seja 80 multiplicado por 5, ou 100 por 4, sempre encontrará 400.

Problemas como o 4, 5 ou 6 eram resolvidos sem equações, incógnitas, etc., recursos desconhecidos na época, mas por processos de tentativa. É interessante observar que esse procedimento medieval é bastante recomendado pelos educadores de hoje para incentivar o raciocínio e a criatividade dos estudantes.

O problema a seguir mostra que as soluções obtidas por tentativa nem sempre eram completas, deixando de lado alternativas válidas.

7. Certo pai de família tinha 100 dependentes, a quem mandou distribuir 100 medidas de provisões do seguinte modo: que os homens recebessem 3 medidas; as mulheres, 2; e as crianças, meia. Diga, quem for capaz, quantos homens, mulheres e crianças eram?

Solução



11 vezes 3 dá 33; 15 vezes 2, 30; 74 vezes meio, 37. 11 vezes mais 15 mais 74 é 100; e, do mesmo modo, 33 mais 30 mais 37.

Hoje, usando equações e incógnitas, faríamos:

h: número de homens.

m: número de mulheres.

c: número de crianças

Então,

$$h + m + c = 100$$

$$3h + 2m + c/2 = 100,$$

que implica $100 = 5h + 3\text{m}$, que fornece as soluções:

$h = 20,\quad m = 0,\quad c = 80$

$h = 17,\quad m = 5,\quad c = 78$

$h = 14,\quad m = 10,\quad c = 76$

$h = 11,\quad m = 15,\quad c = 74$

$h = 8,\quad m = 20,\quad c = 72$

$h = 5\ ,\quad m = 25,\quad c = 70$

$h = 2,\quad m = 30,\quad c = 68$

Os problemas 8 e 9 a seguir mostram, em suas soluções incorretas, as deficiências da época em questões de geometria, denunciando o desconhecimento dos resultados da escola grega.

8. Problema do campo triangular

Um campo triangular mede de um lado 30 pérticas, de outro também 30 e de frente 18.

Diga, quem puder, quantos aripenos [um aripeno equivale a 144 "pérticas quadradas"] compreende?

Solução

Os dois lados de 30 somados perfazem 60, cuja metade é 30, que multiplicado por 9 (que é a metade de 18) dá 270 (que é o cálculo da área em "pérticas quadradas"). Para expressar a área em aripenos é necessário dividir por 144 etc.

Observem que no cálculo da área do triângulo, a medida da altura relativa a um dos lados era substituída erroneamente pela média das medidas dos outros dois lados.

9. Problema do campo circular:

Quantos aripenos tem um campo circular de 400 pérticas de circunferência?

Solução

A quarta parte de 400 é 100; 100 multiplicado por 100 dá 10 000, que é a área. Para expressar em aripenos, divide-se por 144, etc.

Aqui a área do círculo seria dada por

$$\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \pi r^2 \ ,$$

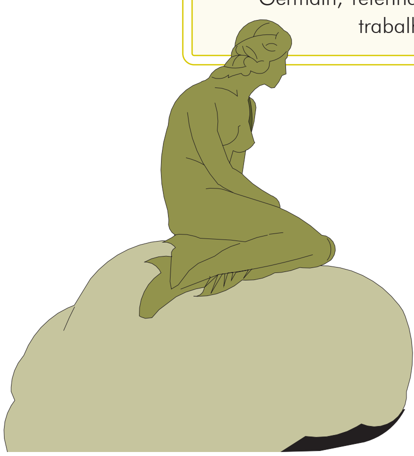
que embute uma aproximação de π por 4, que é bastante grosseira.

Os progressos nos textos geométricos, na Idade Média, só se iniciaram com Gerberto (950-1003), mas aí já é uma outra história...

As mulheres na Matemática

Daniel C. de Morais Filho

> Este artigo é dedicado às abnegadas professoras do nosso imenso país.
>
> O simples aspecto da mulher revela que ela não é destinada nem aos grandes trabalhos intelectuais, nem aos grandes trabalhos materiais.
>
> Schopenhauer em *As Dores do Mundo* (Esboço acerca das mulheres)
>
> Mas quando uma pessoa pertencente ao sexo no qual, de acordo com nossos costumes e preconceitos, é forçada a enfrentar infinitamente mais dificuldades que os homens para familiarizar-se com essas pesquisas dificílimas, e consegue, com êxito, penetrar nas partes mais obscuras delas, tendo, para isso, de superar todas essas barreiras, então essa pessoa tem, necessariamente, a mais nobre coragem, os mais extraordinários talentos e uma genialidade superior.
>
> Gauss, numa carta a Sophie Germain, referindo-se ao trabalho dela.



Na Matemática a maioria das histórias que se contam são sobre matemáticos. Todos os teoremas que conhecemos em nível de primeiro e segundo graus têm nomes de matemáticos, e assim por diante, num etc. e tal inteiramente masculino.

Em vista desse fato é natural que nossos estudantes se perguntem:

"Sendo a Matemática uma ciência tão antiga, será que só homens se dedicaram a ela? Será que nenhuma mulher conseguiu registrar seu nome na Matemática? Ou será que o pensamento matemático, com sua abstração e lógica, é apenas compatível com o raciocínio masculino, afastando as mulheres dessa área?"

Nosso objetivo aqui é mostrar que as respostas a essas perguntas são negativas. De acordo com nossas possibilidades tentaremos resgatar um pouco da história feminina na Matemática. Detalharemos alguns fatos da biografia de mulheres intrépidas e notáveis, que superaram preconceitos, venceram obstáculos e conseguiram chegar, na Matemática, onde poucos homens chegaram.

ANTIGUIDADE

Hipatia de Alexandria

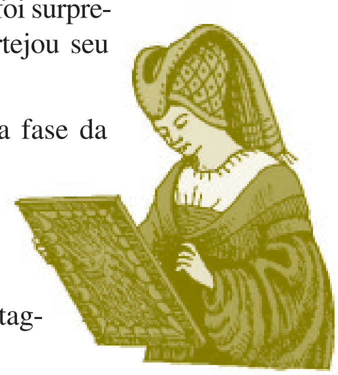
A primeira mulher da qual nos chegou registro de ter trabalhado e escrito na área da Matemática foi a grega Hipatia.

Ela nasceu em Alexandria por volta do ano 370. Da sua formação, sabe-se apenas que foi educada por seu pai, Teon, que trabalhava no famoso Museu de Alexandria. Ele ficou conhecido por seus comentários sobre o *Almagesto* de Ptolomeu, e por uma edição revista dos Elemento,s de Euclides que serviu de base às edições posteriores dessa obra. Apesar do fato de nenhum fragmento de seus escritos ter sido preservado, parece que ela deve ter ajudado seu pai nesse trabalho. Acredita-se também que Hipatia escreveu comentários sobre *As Secções Cônicas* de Apolônio, a *Aritmética* de Diofanto e sobre o *Almagesto*. Ela também inventou alguns aparelhos mecânicos e escreveu uma tábua de astronomia.

Hipatia destacou-se por sua beleza, eloqüência e cultura. Tornou-se uma filósofa conhecida, chegou a ser diretora da escola Neoplatônica de Alexandria e ministrou aulas no Museu de Alexandria. Entretanto, sua filosofia pagã (séculos depois ainda seria acusada de bruxa) e seu prestígio suscitaram a inveja de seus opositores.

O fim dessa mulher foi trágico e triste. Hipatia foi envolvida na disputa em que se encontrava o poder político e o religioso de Alexandria e foi acusada de não ter querido reconciliar as partes. Isso foi o suficiente para incitar a fúria de uma turba de cristãos fanáticos. Um dia, ao chegar em casa, Hipatia foi surpreendida por essa turba enfurecida que a atacou, a despiu e esquartejou seu corpo, matando-a de uma forma grotesca.

Com a funesta morte de Hipatia, em 415, finda-se a gloriosa fase da Matemática alexandrina.



Do século V ao século XVIII

A Matemática na Europa Ocidental entraria numa profunda estagnação, na qual nada mais seria produzido durante mil anos!

Após a morte de Hipatia existe um vazio de doze séculos em que o nome de nenhuma mulher teve seu nome registrado na história da Matemática.

Convém ressaltar, entretanto, que durante esse período, mulheres colaboraram em cálculos astronômicos e vários matemáticos famosos, tais como Viète, Descartes e Leibniz, foram convidados para serem professores de algumas nobres em suas cortes.

Século XVIII

Maria Gaetana Agnesi

Agnesi nasceu em Milão, no ano de 1718. Garota precoce e inteligente, teve uma educação esmerada preparada por seu pai, professor de Matemática na Universidade de Bolonha. Ele apresentou sua filha nas reuniões que organizava, onde se encontravam acadêmicos, cientistas e intelectuais renomados. Já aos onze anos, falava latim e grego perfeitamente, além de hebraico, francês, alemão e espanhol.

Agnesi conhecia a Matemática moderna de sua época. Tinha estudado os trabalhos de Newton, Leibniz, Euler, dos irmãos Bernoulli, de Fermat e de Descartes, além de ser versada em Física e em vários outros ramos da ciência.

Aos 20 anos ela publicou um tratado escrito em latim, *Propositiones Philosophicae*, no qual inseriu várias de suas teses e defendeu a educação superior para mulheres.

Agnesi passaria mais dez anos de sua vida dedicados ao estudo da Matemática e escreveria sua obra magna, *Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventú.* Esse foi um dos primeiros textos de Cálculo escrito de forma didática. A obra consiste em quatro grandes volumes que abordam tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais. Os volumes, publicados em 1748, somam mais de 1000 páginas.

A notoriedade de Agnesi espalhou-se rapidamente. Embora não fosse aceita na Academia francesa, já que nem poderia ser indicada por ser mulher, a Academia Bolonhesa de Ciência a aceitou como membro. Em 1749, o papa Benedito XIV conferiu-lhe uma medalha de ouro e uma grinalda de flores de ouro com pedras preciosas pela publicação de seu livro e a indicou como professora de Matemática e Filosofia Natural da Universidade da Bolonha – cátedra que nunca chegou a assumir, pois em 1752, após a morte de seu pai, ela abandonou a Ciência e assumiu uma vida religiosa.

Infelizmente Agnesi, que muitos nem imaginam ser uma mulher, ficou apenas conhecida por uma curva de terceiro grau, que leva seu nome, a chamada "Curva de Agnesi".

Sophie Germain

Sophie nasceu em uma abastada família francesa, na cidade de Paris em abril de 1776. Aos treze anos, enquanto na França explodia a Revolução, ela se confinou na imensa biblioteca da família.

Após tornar-se autodidata em Grego e Latim, estudou os trabalhos de Newton e de Euler. A oposição de seus pais foi imediata. Eles fizeram de tudo para persuadir a filha a não seguir a carreira matemática: tiraram a luz do seu quarto, confiscaram o aquecedor..., mas Sophie, persistente, continuava estudando à luz de velas, escondida embaixo dos cobertores. Sua determinação foi tanta que derrotou a oposição dos pais, que acabaram liberando seu acesso aos livros de Matemática da família.

Em 1794, a até hoje célebre École Polythecnique foi inaugurada em Paris, mas Sophie não pôde cursá-la por ser mulher. Mesmo assim, conseguiu umas notas de um curso de Análise que Lagrange acabara de ministrar naquela instituição. Fingindo ser um dos alunos da École, sob o pseudônimo de M. Le Blanc, Sophie submeteu a Lagrange umas notas que tinha escrito sobre Análise. Lagrange ficou tão impressionado com o artigo que procurou conhecer seu autor. Após descobrir a sua verdadeira autoria, tornou-se, a partir daí, seu mentor matemático.

Em 1804, após estudar o *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss, ainda escondida na figura de M. Le Blanc, ela começou a corresponder-se com ele. Em 1807 as tropas de Napoleão invadiram Hannover, uma cidade perto de onde Gauss estava. Temendo pela sua segurança de Gauss, Sophie conseguiu obter de um general que comandava o exército e era amigo da família, a promessa de mantê-lo a salvo. Um enviado do general, ao chegar até Gauss, mencionou que estava ali para protegê-lo, graças à intervenção de Mademoiselle Germain. Criou-se uma enorme confusão na cabeça de Gauss, pois seu correspondente francês era o senhor Le Blanc e não uma mulher desconhecida. Após toda a verdade ser desvendada e os fatos esclarecidos, Gauss escreveu a sua protetora uma carta de agradecimento na qual externou seu espanto pela verdadeira identidade do seu correspondente e aproveitou o ensejo para elogiar a coragem e o talento de Sophie para estudar Matemática.

Sophie resolveu alguns casos particulares do 'Último Teorema de Fermat' e em 1816 ganhou um concurso promovido pela Academia de Ciências da França, resolvendo um problema que foi proposto na época sobre vibrações de membranas. De suas pesquisas nessa área nasceu o conceito de curvatura média de superfícies que é hoje objeto de pesquisa de vários matemáticos na área de Geometria Diferencial e suas idéias sobre elasticidade foram fudamentais na teoria geral da elasticidade, criada posteriormente.

Além de Matemática, Sophie estudou Química, Física, Geografia, História, Psicologia e publicou dois volumes com seus trabalhos filosóficos. Ela continuou trabalhando em Matemática e Filosofia até sua morte, em 1831.

Século XIX

No final do século passado, à custa de árduos esforços, as mulheres começaram a estudar Matemática regularmente em algumas universidades e a obter os primeiros graus de Doutoras em Matemática. Aos poucos os preconceitos foram sendo quebrados.

Entre as mulheres matemáticas que biografamos acima e as de hoje, matemáticas profissionais, estão duas mulheres extraordinárias que viveram entre o final do século passado e o começo deste, verdadeiramente respeitadas como as "primeiras" matemáticas: *Sofia Kovalevsky* e *Emmy Noether*. Suas biografias são admiráveis. E sobre isso, esperamos falar numa próxima vez.

Amalie Emmy Noether

Emmy Noether foi a filha mais velha de uma família judia de quatro filhos. Nasceu em Erlangen, Alemanha, a 23 de março de 1882. Seu pai foi o eminente matemático *Max Noether*.

Após concluir seus estudos básicos, ela optou por estudar Matemática. Já sabemos que, naquela época, essa não era uma decisão fácil. Como em outras universidades do mundo, a Universidade de Erlangen não admitia mulheres como estudantes. Noether conseguiu obter autorização para assistir aos cursos oferecidos pela Universidade apenas como ouvinte. Após dois anos, ainda na mesma situação, ela seguiu para a Universidade de Göttingen, onde teve a oportunidade de estudar com os célebres matemáticos *David Hilbert*, *Felix Klein* e *Hermann Minkowski*.

Finalmente, em 1904, após um semestre em Göttingen, a Universidade de Erlangen mudou sua política universitária, aceitando que as mulheres tivessem os mesmos direitos acadêmicos que os homens. Noether retornou imediatamente a sua cidade natal e, em 1907, concluiu seu doutorado.

Entretanto, ainda não se admitiam mulheres como professoras nas universidades. Noether, por algum tempo, e sem nenhum vínculo oficial, substituiu seu pai, que estava com problemas de saúde, no Instituto de Matemática de Erlangen.

Em 1909 foi admitida na Sociedade Matemática Alemã e, em 1915, já com sua reputação científica consolidada, foi convidada por Hilbert e Klein para retornar a Göttingen e trabalhar com eles, e lá permaneceu até 1933. No entanto, apenas em 1919 Noether pôde ser admitida legalmente como professora, e somente em 1922 começou a receber um salário. Antes disso, Hilbert, que tanto se esforçou pela admissão de Noether como docente, divulgava como sendo seus os cursos que ela lecionava!

Os nazistas, em 1933, destituíram Noether do seu cargo. Foram em vão os esforços de vários matemáticos para mudar essa situação. Além de mulher e judia, ela era membro do Partido Social Democrata. Felizmente, nesse mesmo ano, ela recebeu convites para ir para Oxford, para o Somerville College e para o Bryn Mawr College nos Estados Unidos. Noether optou pelo último estabelecimento, talvez por sua reputação de ter abrigado eminentes mulheres matemáticas. Pouco tempo depois, começou a dar aulas também em Princeton. Sua estada nos Estados Unidos durou pouco. Morreu em 14 de abril de 1935, após uma complicada operação de um cisto no ovário.

A obra matemática de Emmy Noether é original e profunda. Trabalhou especialmente em Álgebra Abstrata, na teoria dos ideais e das álgebras não-comutativas. Os módulos noetherianos foram assim chamados, em sua homenagem. Ela deu as formulações matemáticas de vários conceitos da Teoria Geral da Relatividade de Einstein. O próprio Einstein, em 1918, numa carta a Hilbert, expressou sua admiração ao penetrante pensamento matemático de Noether.

Foi a única mulher a proferir uma palestra plenária no Congresso Internacional de Zurique, em 1932. Juntamente com o matemático *Emil Artin* ganhou o *Alfred Ackermann-Teubner Memorial Prize* por seus trabalhos em Matemática.

Após sua morte, matemáticos importantes não pouparam palavras para elogiá-la. Segundo o matemático francês *Jean Dieudonné*, ela foi “[...] de longe, a melhor mulher matemática de todos os tempos e, dentre homens ou mulheres, a maior matemática do século XX”.

Um enigma proposto por Ada Lovelace

Ada LOVELACE era o nome de casada de Ada BYRON, filha do famoso poeta inglês Lord BYRON.

Essa mulher do século XIX (toda a sua vida decorreu durante esse século) foi uma das mulheres mais sobressalientes da História da Matemática, famosa sobretudo pelos seus trabalhos com Charles BABBAGE na invenção da sua máquina de calcular.

Certo dia, ao lhe perguntarem a idade, ela respondeu: “Se trocarmos a ordem dos seus dois algarismos e elevarmos ao quadrado, obtem-se justamente o ano em que estamos”.

Em que ano teve lugar esta conversa? Em que ano nasceu Ada BYRON?

Arquimedes e a coroa do rei

Severino de Souza

Introdução

O Professor Geraldo Ávila teve a gentileza de mostrar-me seu último artigo sobre a "regra de três", antes mesmo que ele fosse publicado, como se faz agora, no presente livro. Li-o com bastante interesse e deparei-me, já no final do artigo, com a sugestão do Prof. Ávila de que os leitores da Revista tentassem apresentar problemas interessantes sobre proporcionalidade. Pois é exatamente isto o que pretendemos fazer aqui, apresentando a solução daquele interessantíssimo problema da coroa, o qual Arquimedes resolveu para o rei de Siracusa. Mas, antes vamos contar um pouco da história da vida de Arquimedes e do tempo em que viveu este grande sábio.

Arquimedes e seu tempo

Arquimedes nasceu e viveu em Siracusa, uma cidade da Sicília que existe até os dias de hoje (veja o mapa da Figura 1). Consta que ele morreu no ano 212 a.C. com a idade de 75 anos, e daí se conclui que nasceu no ano 287 a.C. Foi o maior matemático da Antiguidade. Na verdade, como Arquimedes, Newton e Gauss são considerados os três maiores matemáticos de todos os tempos, é claro então que Arquimedes ostenta o título de maior matemático da História, pelo menos até o nascimento de Newton em 1642.

Siracusa era uma cidade-estado das muitas que os gregos fundaram, portanto Arquimedes era um matemático grego. Mas nessa época a Grécia já havia sido conquistada por Alexandre da Macedônia, que expandira seu Império pela Ásia e Egito. Alexandre resolvera instalar a capital do Império numa cidade a ser construída no extremo oeste do delta do rio Nilo. Isto foi feito, não por Alexandre, que morreu em 323 a.C., mas por um de seus generais, Ptolomeu Soter, que ficou com a parte egípcia do Império e iniciou uma dinastia grega no Egito. Assim surgiu Alexandria (veja o mapa da Figura 1), que se tornou um centro famoso da cultura chamada "helenística" e que contava até com uma verdadeira universidade – um instituto de altos estudos e uma biblioteca muito famosa, que chegou a ter 750 000 volumes.

Em Alexandria, a Matemática ocupava um lugar de destaque, e nomes como Euclides (o da Geometria), Apolônio, Arquimedes, Eratóstenes, Aristarco e Ptolomeu (o astrônomo, sem nenhum parentesco com os reis Ptolomeus) pertenceram à Escola de Alexandria. É verdade que Arquimedes viveu em Siracusa, mas estudou em Alexandria e mantinha correspondência com vários sábios de lá, como Eratóstenes. Esse último era bibliotecário, um homem de saber universal, bem conhecido pelo chamado "crivo de Eratóstenes", porém seu feito mais notável foi calcular o raio e a circunferência da Terra.

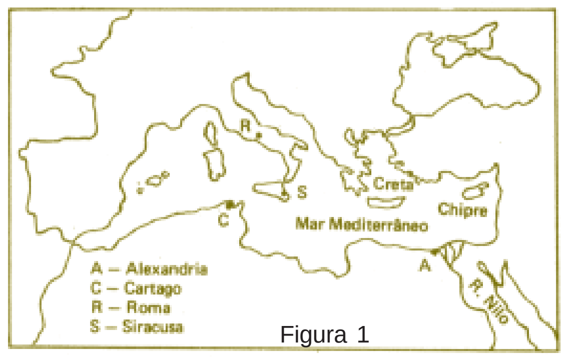


Figura 1

Na época em que viveu Arquimedes, Roma já estava em expansão, com muitas guerras de conquistas, dentre as quais são bem conhecidas as chamadas "guerras púnicas", contra Cartago. Esta cidade ficava onde é hoje um subúrbio de Tunis, a capital da Tunísia (veja Figura 1). Naquele tempo, Cartago controlava uma extensa região que se estendia até a Espanha, constituindo-se numa incômoda rival de Roma. Na segunda das guerras púnicas, Siracusa se aliara a Cartago, daí ter sofrido uma investida fatal de Roma. Siracusa resistiu bravamente aos ataques do general Marcelo, graças, sobretudo, às máquinas de guerra idealizadas por Arquimedes; mas depois de um longo cerco acabou por sucumbir à superioridade das tropas romanas. Há várias versões sobre a morte de Arquimedes; segundo uma delas, durante o saque da cidade, em 212 a.C., ele foi morto por um soldado romano enquanto, absorto, se ocupava com problemas matemáticos.

Arquimedes era bem relacionado com o rei Heron de Siracusa e talvez até fosse seu parente. Conta-se que Heron mandou fazer uma coroa de ouro, mas teve razões para desconfiar de que o ouro da coroa houvesse sido misturado com muita prata. Ele comunicou o fato a Arquimedes, para que o sábio encontrasse um meio de dirimir suas dúvidas. Diz a história que

Arquimedes descobriu como resolver o problema enquanto tomava um banho e refletia sobre o fato de que os corpos imersos na água – como seu próprio corpo - se tornam mais leves, exatamente *pelo peso da água que deslocam.* Este fato lhe teria permitido idealizar um modo de resolver o problema da coroa, e tão excitado teria ficado com a descoberta, que saiu nu pelas ruas de Siracusa, gritando “eureka! eureka!”, que significa “descobri! descobri!”

O Princípio de Arquimedes

A descoberta de Arquimedes, uma vez compreendida, é surpreendentemente simples. Aliás, isto de ser simples é um traço muito freqüente nas idéias geniais e fecundas.

Para explicar o chamado *Princípio de Arquimedes*, vamos imaginar duas experiências. Na primeira delas seguramos um pedaço de ferro de peso *P*, totalmente submerso num vaso d’água. Verificamos que o ferro fica mais leve do que fora d’água, mas, se abandonado a si mesmo, vai ao fundo do vaso. Ele fica mais leve porque perde, em peso, uma quantidade igual ao peso *p* do volume de água que deslocou (Figura 2). Acontece que $P > p$; logo, dentro d’água, a força resultante sobre o ferro é $P – p$, dirigida para baixo.

Na segunda experiência seguramos um pedaço de cortiça de peso *P’*, também totalmente submerso na água. Verificamos que ele não somente perde todo o seu peso, mas ainda é empurrado para cima. Isto porque, desta vez, o peso *P’* da água deslocada pela cortiça é maior que o peso *P’* da própria cortiça (Figura 3); então, dentro da água, a força resultante sobre a cortiça é $p’ – P’$ dirigida para cima. Portanto, quando abandonamos a cortiça, ela volta à tona e fica boiando. E, quando em repouso na superfície, ela fica apenas parcialmente submersa (Figura 4), o suficiente para deslocar um volume de água de peso igual ao peso total da cortiça.

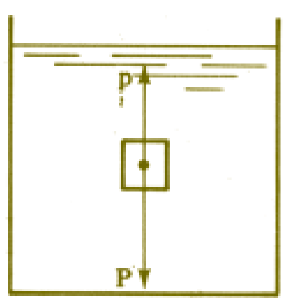


Figura 2

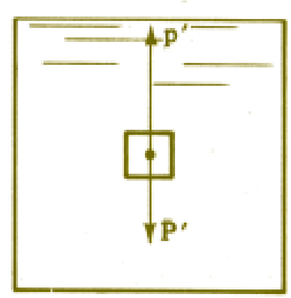


Figura 3

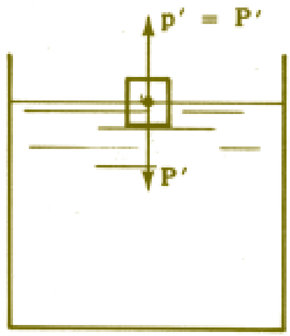


Figura 4

Vamos enunciar em destaque o famoso

Princípio de Arquimedes. *Quando um corpo é mergulhado na água ele perde, em peso, uma quantidade igual ao peso do volume de água por ele deslocada.*

A Coroa do rei

Veremos agora como resolver o problema da coroa, utilizando o princípio de Arquimedes e um pouco de proporções. Seja P o peso da coroa, que supomos ter sido feita com um peso x de ouro e um peso y de prata. Logo,

$$P = x + y. \qquad (1)$$

Suponhamos que uma porção de ouro de peso x tenha peso x' quando pesada dentro d'água, e seja X' o peso, dentro d'água, de uma porção de ouro de peso igual ao peso P da coroa. Ora, o peso do ouro dentro d'água é proporcional ao seu peso fora d'água (porque o volume é proporcional ao peso, devido à homogeneidade do material). Logo,

$$\frac{x'}{x} = \frac{X'}{P} \quad \therefore \quad x' = \frac{xX'}{P}. \qquad (2)$$

De modo análogo, o peso da prata, quando pesada dentro d'água, é proporcional ao seu peso fora d'água. Se y' designa o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso y, e Y' o peso, dentro d'água, de uma porção de prata de peso igual ao peso P da coroa, então teremos, exatamente como no raciocínio que nos levou à equação (2) acima,

$$y' = \frac{yY'}{P} \qquad (3)$$

Seja *P'* o peso da coroa quando pesada dentro d'água. É claro que *P'* = *x'* + *y'*, de sorte que, somando (2) e (3) acima, obtemos

$$P' = x' + y' = \frac{xX' + yY}{'P} \quad \therefore \quad PP' = xX' + yY'.$$

Daqui e de (1) segue-se que

$$(x + y)p' = xX' + yY'$$

$$\ddot{}\; x(X' - P') = y(P' - Y'),$$

ou ainda,

$$\frac{x}{y} = \frac{P' - Y'}{X' - P'} \qquad (4)$$

Não temos dados específicos sobre a coroa verdadeira que o rei Heron entregou a Arquimedes para ser investigada, mas podemos muito bem imaginar uma situação concreta. Digamos que a coroa pesasse *P* = 894 g fora d'água e 834 g dentro d'água. Suponhamos também, seguindo a notação já introduzida, que *X'* = 847,7 g e *Y'* = 809 g. Substituindo estes valores em (4) encontramos

$$\frac{x}{y} = \frac{834 - 809}{847{,}7 - 834} = \frac{25}{13{,}7} \cong 1{,}82.$$

Daqui e de (1) obtemos o seguinte sistema de equações para determinar *x* e *y*:

$$x + y = 894, \quad x = 1{,}82\, y.$$

Resolvendo este sistema encontramos $x \cong 577$ g e $y \cong 317$ g. Portanto, nossa coroa contém o peso imaginário 577 *g* de ouro e 317 *g* de prata.

Tendo em conta que o peso específico do ouro é 19,3 g/cm^3 e o da prata é 10,5 g/cm^3, podemos prosseguir e calcular as quantidades *volumétricas* de ouro e prata usados na coroa. Trata-se, novamente, de um cálculo simples usando proporções. Sejam V_0 e V_p, respectivamente, os volumes de ouro e prata empregados para fazer a coroa. Então,

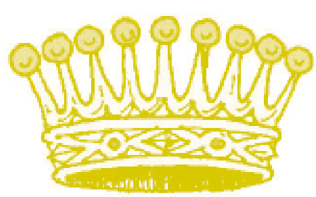
$$\frac{x}{V_0} = \frac{19,3}{1} \quad \text{e} \quad \frac{y}{V_P} = \frac{10,5}{1}.$$

Substituindo x = 577 e y = 317 e resolvendo as equações resultantes, encontramos

$$V_0 = \frac{577}{19,3} \cong 29,9\ \text{cm}^3 \quad \text{e}$$

$$V_P = \frac{317}{10,5} \cong 30,2\ \text{cm}^3.$$

Vemos que o ourives usou praticamente as mesmas quantidades volumétricas de ouro e prata, aproximadamente 30 cm^3 de ouro e 30 cm^3 de prata. É muita prata para pouco ouro numa coroa real! Oxalá isto não tenha custado a cabeça do ourives...



Numerais

Escreve-nos o colega: “Ao dar uma aula sobre numerais em uma 5ª série do 1º grau, observei que os aspectos históricos da Matemática despertam no adolescente grande interesse. Elaborei então um estudo sobre a história dos numerais para os meus alunos.”

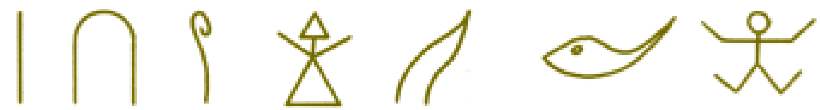
Transcrevemos abaixo alguns trechos deste estudo.

Numerais egípcios

Os numerais egípcios foram encontrados no interior e exterior das pirâmides do Egito. Eles fazem parte dos famosos hieroglifos que datam de 3300 anos antes de Cristo.

Os numerais egípcios são:

1   10   100   1000   10 000   100 000   1 000 000



Os egípcios escreviam os números na horizontal. Veja como eles escreviam 12 302:

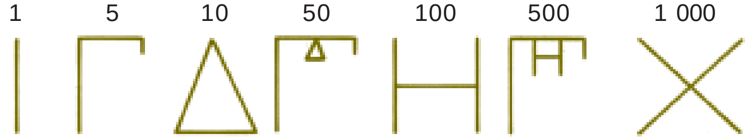
10 000 + 1 000 + 1 000 + 100 + 100 + 100 + 1 + 1 = 12 302

Numerais gregos

Em datas anteriores a 300 a.C. surgiram os numerais gregos. Os gregos, como os egípcios, escreviam seus numerais na posição horizontal.

Os numerais gregos são:

1   5   10   50   100   500   1 000



Observe que o numeral do número 50 é formado pelos numerais de 5 e 10. Veja como fica o número 2 877:

O trabalho continua com uma descrição dos numerais babilônicos e o seu uso na representação dos números. Descreve, a seguir, os numerais maias e, na parte final, menciona os numerais romanos e indu-arábicos usados até hoje.

Diz o professor Mozart que o trabalho teve como fonte de pesquisa o livro School Mathematics II, de Robert E. Eicholz e outros; Addison Wesley, 1971.

(Enviado por Mozart Cavazza Pinto Coelho.)

Euclides, Geometria e Fundamentos

Geraldo Ávila

Introdução

A preocupação com os fundamentos da Matemática remonta aos gregos da antigüidade. E a obra conhecida como *Os Elementos* de Euclides é a primeira apresentação da Matemática com pretensões – aliás, muito justificadas! – de ser rigorosamente fundamentada. Falemos um pouco sobre Euclides e os *Elementos*.

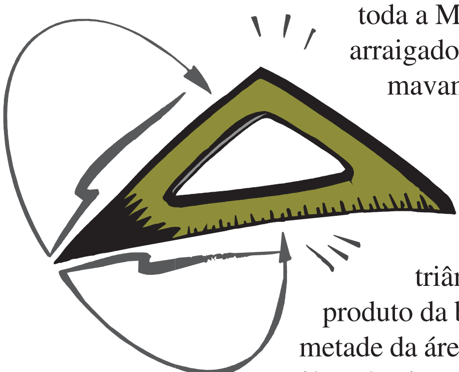
Os Elementos de Euclides

Temos muito pouca informação sobre Euclides, que teria vivido por volta do ano 300 a.C. E esse pouco que dele sabemos nos vem dos comentários de Proclus (410-485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Mesmo Proclus tem dificuldade em determinar a época em que viveu Euclides.

Euclides escreveu várias obras científicas. A mais famosa das quais, conhecida com o nome de *Elementos*, reúne quase todo o conhecimento matemático daquele tempo. Em parte por causa disso, e também por tratar-se de uma obra de escola, que reunia a maior parte da Matemática então conhecida, as obras anteriores aos *Elementos* desapareceram. A única exceção são alguns fragmentos atribuídos a *Hipócrates de Quio*, que viveu no século V a.C. Assim, *Os Elementos* de Euclides é praticamente tudo o que temos da Matemática grega, que se desenvolveu desde seu início com *Tales de Miletos*, que viveu no século VI a.C., até o tempo de Euclides – um período de cerca de 250 anos. Aliás, muito pouco tempo para que a Matemática, logicamente organizada, evo luísse do estágio embrionário em que se encontrava com Tales até o alto grau de sofisticação que transparece em *Os Elementos*.

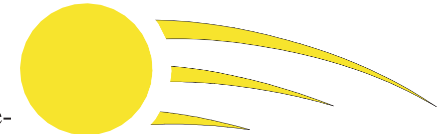
Não sabemos se Euclides escreveu *Os Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; a obra foi foi muito usada no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios. No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de *Legendre*, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive no português. Esse livro foi muito usado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX.

Um equívoco que se comete com freqüência é pensar que *Os Elementos é* uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de Aritmética e Álgebra em vários dos livros de *Os Elementos*. O que é verdade - e isso explica, pelo menos em parte, a origem do equívoco - é que a Matemática grega, na época em que Euclides compôs sua obra, era toda ela geometrizada. De fato, a crise dos incomensuráveis e a genial solução que lhe deu Eudoxo, aliada a uma excessiva preocupação com o rigor, encaminhou toda a Matemática para o lado da Geometria. Isso se tornou tão arraigado que até cerca de 100 anos atrás os matemáticos costumavam ser chamados de "geômetras".



Um outro equívoco não menos freqüente é pensar que os fatos geométricos de *Os Elementos* sejam expressos numericamente como o são para nós hoje. Para exemplificar, enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula, exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante. Para nós, hoje, a área de um círculo é πr^2, mas para *Arquimedes* (287-212 a.C.), que viveu algumas décadas depois de Euclides, a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio do círculo. Para nós o volume da esfera é $4\pi r^3/3$, enquanto o que Arquimedes nos diz é que o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3; e isso é informação suficiente.

Na Matemática grega, antes e durante o período helenístico, não havia fórmulas como as que conhecemos hoje; tudo era dado em termos de proporções, como no caso do volume da esfe-



ra que acabamos de mencionar. E isso perdurou no ocidente por mais um milênio após o declínio da civilização helenística.

O conteúdo de *Os* Elementos

Os Elementos são hoje uma obra antes de tudo de valor histórico. Sua melhor versão é a tradução inglesa de *Thomas L. Heath* (que foi publicada pela Editora Dover em três volumes).

Isso porque Heath enriqueceu sobremaneira a obra de Euclides com uma excelente introdução, além de inúmeros, valiosos e esclarecedores comentários.

Folha de rosto da primeira versão inglesa de *Os Elementos*.

O volume I de Heath reúne os Livros I e II de *Os Elementos*, o primeiro destes contendo uma boa parte da geometria plana, construções geométricas, teoremas de congruência, áreas de polígonos e o teorema de Pitágoras (que é a Proposição 47). Ainda no volume I de Heath encontra-se o Livro II de *Os Elementos*, sobre o que se costuma chamar de "Álgebra geométrica". Por exemplo, a Proposição 4 desse Livro II é o equivalente, em linguagem geométrica, à propriedade que hoje conhecemos como "quadrado da soma" (igual ao quadrado do primeiro, mais o quadrado do segundo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo). Euclides enuncia isso geometricamente assim: "se um segmento de reta é dividido em dois, o quadrado construído sobre o segmento inteiro é igual aos quadrados construídos sobre os segmentos parciais e duas vezes o retângulo construído com estes segmentos". Euclides não fala, mas ele está se referindo a áreas, quando diz "... é igual...".

O volume II de Heath contém os Livros III a IX de *Os Elementos*, tratando do círculo (Livro III), construção de certos polígonos regulares (Livro IV), teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), semelhança de figuras (Livro VI) e teoria dos números (Livros VII-IX). Por exemplo, a Proposição 20 do Livro IX é o famoso teorema: "existem infinitos números primos". Mas Euclides não fala "infinitos", já que os gregos não admitiam o que Aristóteles chama de "infinito atual", apenas o chamado "infinito potencial". Em linguagem de hoje, Euclides diria mais ou menos isso: "Dado qualquer conjunto (finito, entenda-se bem!) de números primos, existe algum número primo fora desse conjunto". E a demonstração, novamente, é geométrica. Na opinião do matemático inglês *Godfrey Harold*

Hardy (1877-1947), trata-se de uma das mais belas demonstrações da Matemática. Finalmente, o volume III de Heath contém os Livros X-XIII, onde são tratados a incomensurabilidade, geometria espacial e os poliedros regulares.

A Geometria dedutiva

Foi no início do século VI a.C. que *Tales de Mileto* inaugurou na Matemática a preocupação demonstrativa. A partir de então a Matemática grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, essas a partir de outras precedentes, e assim por diante, um processo que não teria fim. Mas os gregos logo perceberam isso e viram que era necessário parar o processo em certas proposições iniciais, consideradas evidentes por si mesmas; com base nessas, todas as outras são demonstradas. As proposições evidentes por si mesmas são hoje designadas, indiferentemente, "postulados" ou "axiomas". O aspecto mais importante de *Os Elementos* é essa organização dos fatos, num admirável encadeamento lógico-dedutivo, em que um número reduzido de proposições e definições iniciais são o bastante para se demonstrar, uns após os outros, todos os teoremas considerados. Historicamente, *Os Elementos* de Euclides é a primeira corporificação desse "método axiomático", do qual voltaremos a falar mais adiante.

As geometrias não-euclidianas

Embora muito admirado e aplaudido, o modelo axiomático de *Os Elementos*, no que se refere ao quinto postulado, ou postulado das paralelas[1], suscitou questionamentos.

Já na antigüidade vários matemáticos acreditavam que ele pudesse ser demonstrado com base nos outros postulados e tentaram fazer tal demonstração. Essas tentativas foram retomadas nos tempos modernos pelo matemático italiano *Girolamo Saccheri* (1667-1733), que publicou, pouco antes de morrer, um opúsculo no qual pretendia ter demonstrado o postulado pelo método de redução ao absurdo. Assim, negando o postulado, ele demonstrou uma série de teoremas, concluindo ter chegado a uma contradição. Mas, no fundo, no fundo, não havia contradição nas conclusões de Saccheri, embora isso só fosse notado muito mais tarde, quando *Eugênio Beltrami* (1835-1900) descobriu o trabalho de Saccheri.

Por volta de 1830 já havia sérias suspeitas de que o postulado das paralelas não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Suspeitava-se que ele fosse independente dos outros quatro, e que se pudesse desenvolver uma geometria a partir de negações do postulado das paralelas, ao lado dos outros postulados

1 Uma de suas versões é: num plano, por um ponto fora de uma reta existe uma e somente uma paralela à reta dada.

de Euclides. Foi nessa época que o matemático húngaro *János Bolyai* (1802-1860) e o russo *Nicokolai Ivanovich Lobachevsky* (1792-1856) publicaram, independentemente um do outro, a descoberta de geometrias não-euclidianas, ou seja, geometrias que negam o postulado das paralelas [2].

Mas as publicações de Bolyai e Lobachevski não foram suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade das geometrias não-euclidianas. Esses trabalhos eram parecidos com o de Saccheri: negavam o postulado das paralelas e desenvolviam uma série de teoremas sem chegar a contradição alguma. Mas, e daí? Quem garante que a contradição não está para aparecer logo no próximo teorema que ainda não foi demonstrado? Quem garante que todos os teoremas já foram enunciados e demonstrados? Aliás, foi somente após essas questões terem sido levantadas, aliado à em conexão com as tentativas de construir geometrias não-euclidianas, que os matemáticos começaram a perceber que a própria Geometria de Euclides também estava sujeita aos mesmos questionamentos.

Quem poderia garantir que os cinco postulados de Euclides não poderiam levar a uma contradição? Afinal, Euclides demonstrara apenas um número finito de teoremas. Quem sabe a contradição apareceria no próximo teorema, como alguém que, depois de tanto percorrer as areias de um deserto à procura de um oásis, quando não mais acredita que ele exista, pode - agora por felicidade e não desdita - encontrá-lo do outro lado da próxima duna!...]

Foi Beltrami quem primeiro exibiu um modelo de geometria não-euclidiana, que permitia interpretar os fatos dessa geometria, em termos da própria geometria euclidiana.

Outros modelos foram construídos por *Felix Klein* (1849-1925) e *Henri Poincaré* (1854-1912). Esses modelos, como o de Beltrami, foram apoiados na geometria euclidiana.

O método axiomático

Foi a partir de então - após esses vários matemáticos haverem exibido modelos euclidianos das geometrias não-euclidianas – que essas geometrias ganharam total credibilidade[3]. Provava-se que elas eram consistentes, isto é,

---

2 Quando jovem, o pai de *Bolyai* havia sido colega de *Gauss*, em Göttingen. E quando o filho escreveu suas idéias, ele (o pai) enviou um exemplar do manuscrito a *Gauss*. Mas este, pouco sensível ao entusiasmo do jovem *János*, escreveu de volta, dizendo mais ou menos o seguinte: "sim, mas isso que seu filho fez não é novidade para mim, que percebi essa possibilidade há muitos anos, em minha juventude". Realmente, tudo indica que Gauss tenha sido o primeiro matemático a ver a possibilidade das geometrias não-euclidianas.

3 Estamos deixando de lado uma vertente importantíssima no desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, devida a *Riemann*, mas que não é necessária no momento.

livres de contradições internas. Mas tais provas apoiavam-se na geometria euclidiana, de sorte que elas tornavam ao mesmo tempo evidente a necessidade de provar a consistência da própria Geometria de Euclides. Os matemáticos começaram então a estudar a consistência dos postulados de Euclides, e logo perceberam que eles eram insuficientes para provar os teoremas conhecidos, sem falar nos demais que viessem a ser considerados no futuro. Analisando os *Elementos* desse novo ponto de vista, eles descobriram que a axiomática euclidiana era muito incompleta e continha sérias falhas. Euclide*s*, em suas demonstrações, apelava para fatos alheios aos postulados. Era necessário reorganizar a própria geometria euclidiana, acrescentando, inclusive, os postulados que estavam faltando. Isso foi feito por vários matemáticos no final do século XIX, dentre eles *David Hilbert* (1862-1943), que, em 1889, publicou o livro *Fundamentos da Geometria*, no qual ele faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana.

Os Fundamentos da Matemática

Paralelamente ao que acontecia em Geometria, as preocupações com o rigor se faziam presentes também na Análise Matemática, a partir de aproximadamente 1815. Os desenvolvimentos que vinham ocorrendo na Geometria, na Álgebra e na Análise durante todo o século XIX convergiram, no final do século, para uma preocupação com os fundamentos de toda a Matemática. Por duas razões importantes, os matemáticos acabaram se convencendo de que todas as teorias matemáticas teriam de se fundamentar, em última instância, nos números naturais.

De um lado, os números complexos, os números reais, os racionais e os inteiros puderam ser construídos, de maneira lógica e consistente, uns após outros, começando nos números naturais. De outro lado, Hilbert estabelecera uma correspondência entre os elementos geométricos do plano - pontos, retas e círculos - com os entes numéricos da geometria analítica. Os pontos podem ser caracterizados por pares ordenados de números reais, e as retas e círculos por suas equações. Isso permitiu reduzir o problema da consistência da Geometria à consistência da Aritmética. Provando-se a consistência desta, ficaria também provada a da Geometria. Assim, a Geometria, que desde a antigüidade era considerada o modelo de rigor lógico, estava agora dependendo da própria Aritmética para sua efetiva fundamentação.

Leopold Kronecker (1823-1891) dizia que Deus nos deu os números naturais e que o resto é obra do homem. Com isso ele queria dizer que esses núme-

4 O matemático italiano *Giuseppe Peano* (1858-1932) mostrou como construir esses números a partir de noções primitivas e postulados.

ros deveriam ser tomados como o ponto de partida, o fundamento último de toda a Matemática. Não obstante, *Richard Dedekind* (1831-1916) mostrou ser possível construir os números naturais a partir da noção de conjunto, noção essa que seria mais extensamente desenvolvida por *Georg Cantor* (1845-1918)[4].

A possibilidade de construir toda a Matemática a partir da teoria dos conjuntos intensificou o interesse por esse campo de estudos. Porém, esses estudos estavam ainda incipientes e os matemáticos já começavam a encontrar sérias contradições internas na teoria. Muitas dessas contradições foram resolvidas, até que, em 1931, o lógico austríaco *Kurt Gödel* (1906-1978) surpreendeu o mundo matemático com a publicação de um trabalho em que demonstrava que o método axiomático tem inevitáveis limitações, que impedem mesmo a possibilidade de construir um sistema axiomático, abrangendo a Aritmética.

Para bem entender o que isso significa, devemos lembrar que um sistema axiomático deve satisfazer as três condições seguintes: ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de os postulados serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo.

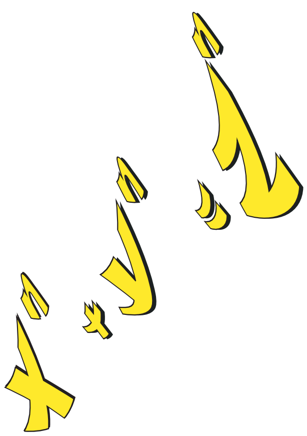
Pois bem, Gödel prova, dentre outras coisas, que a consistência de qualquer sistema matemático que englobe a Aritmética não pode ser estabelecido pelos princípios lógicos usuais. Isso ele prova como conseqüência deste seu outro resultado, conhecido como o teorema da incompletude: se uma teoria formal que abrange a Aritmética for consistente, ela necessariamente será incompleta, o que significa dizer que haverá alguma proposição sobre os inteiros que a teoria será incapaz de decidir se verdadeira ou falsa.

Seria errôneo pensar que os estudos de *Fundamentos* terminam com os resultados de Gödel, ou que esses resultados, pelos seus aspectos negativos, condenam a Matemática a uma posição inferior no contexto do conhecimento humano. O resultado de Gödel certamente mostra que é falsa a expectativa acalentada desde a antigüidade de que o conhecimento matemático, com seu caráter de certeza absoluta, possa ser circunscrito nos limites permitidos por um sistema axiomático. Além de revelar as limitações do método axiomático, os resultados de *Gödel* mostram, isto sim, que as verdades matemáticas, na sua totalidade, escapam aos figurinos formais dos sistemas axiomáticos.

Hermann Weyl (1885-1955), que está entre os maiores matemáticos do século XX, disse, espirituosamente: *Deus existe porque certamente a Matemática é consistente; e o demônio existe porque somos incapazes de provar essa consistência.*

Finalmente Fermat descansa em paz

Flávio Wagner Rodrigues



Em 1995, a comunidade matemática aceitou a prova dada por *Andrew Wiles* para a famosa conjetura de Fermat, formulada em 1630. Wiles apresentou o seu trabalho pela primeira vez em 1993, mas havia um problema numa das etapas da demonstração que ele finalmente conseguiu resolver em colaboração com *Richard Taylor*.

Como os leitores bem sabem, a conjetura afirmava que para o natural $n > 2$ não existem inteiros positivos $x, y, z,$ tais que $x^n + y^n = z^n$. Fermat escreveu essa afirmação na margem de um livro, dizendo que a solução que ele encontrara era longa e não cabia no papel que ele dispunha.

Resolvido o problema, e frustrados assim os sonhos dos milhares de amadores e profissionais que sonhavam com a glória de resolvê-lo, restam duas indagações que são, no mínimo, curiosas.

A primeira é como uma conjetura, cujo enunciado é simples e acessível até para estudantes do ensino médio, levou tanto tempo e exigiu teorias extremamente sofisticadas para ser finalmente decidida. Como não sabemos a resposta, resta-nos o consolo de que talvez em fatos como esse residam a beleza e o encanto da Matemática.

A outra dúvida é saber se Fermat tinha realmente uma demonstração. Com altíssima probabilidade a resposta é "não". Afinal, a demonstração de Wiles utiliza teorias que Fermat certamente não conhecia e ocupou mais de 200 páginas que nenhuma margem de livro, por maior que fosse, seria capaz de conter. O mais provável é que Fermat tenha cometido um erro semelhante aos que cometeram milhares de pessoas que tentaram depois dele. Mas, ainda que apenas por curiosidade histórica (para saber no que foi que ele errou), não podemos deixar de concordar com Fernando Quadros que foi realmente uma pena que Fermat não dispusesse de uma margem mais larga.

A regra da falsa posição

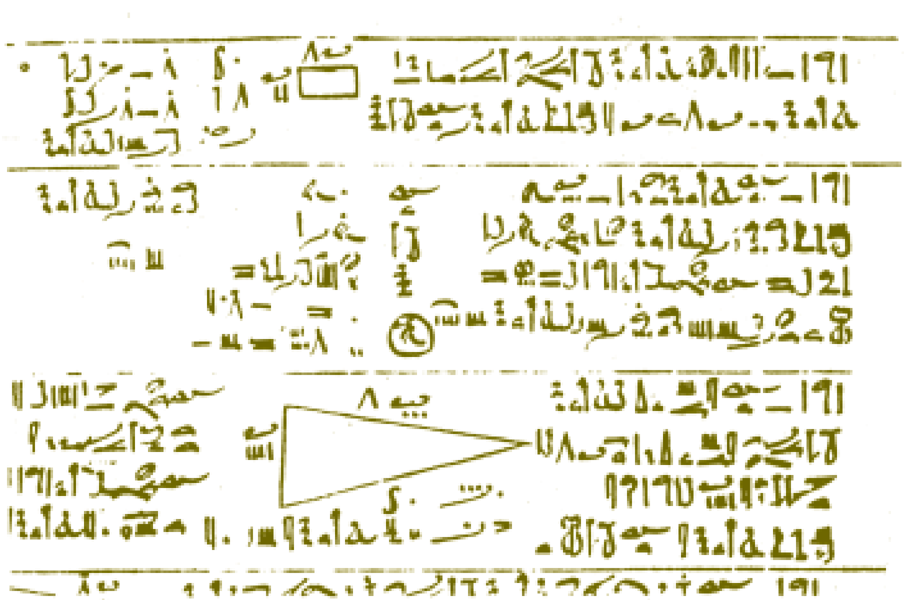
Oscar Guelli

Há aproximadamente 3 600 anos o faraó do Egito tinha um súdito cujo nome chegou até os nossos dias: *Aahmesu.*

Aahmesu, que significa "filho da lua", era uma pessoa muito simples, provavelmente um escriba.

Atualmente ele é conhecido como *Ahmes,* autor do *Papiro Ahmes,* mais famoso como *Papiro de Rhind*.

O Papiro de Rhind é um antigo manual de Matemática, contendo oitenta *problemas de Álgebra*, cada um deles com a sua solução.



O problema a seguir está no *Papiro de Rhind*. Mudamos um pouco os números, apenas para tornar mais clara a explicação. Naturalmente, isto não altera em nada a idéia central.

"Um montão, seus dois terços, sua metade, todos ao juntar-se fazem treze. Qual é a quantidade?"

O problema se reduz à equação:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \Rightarrow 6 \cdot \left(x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x\right) = 6 \cdot 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 4x + 3x = 78 \Rightarrow 13x = 78 \Rightarrow x = \frac{78}{13} \Rightarrow x = 6.$$

Mas os antigos matemáticos egípcios não podiam resolvê-lo desta forma.

As suas equações vinham expressas totalmente em palavras. A Álgebra puramente simbólica estava muito distante de ser inventada. Encontravam a solução deste tipo de equação através de um método chamado *regra da falsa posição:*

– atribuíam um valor falso a *montão,* por exemplo, 12:

$$12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12) = 12 + 8 + 6 = 26$$

– uma regra de três simples indicava o valor verdadeiro de *montão:*

O valor falso 12 está para 26 assim como o valor verdadeiro = *montão* está para 13.

Portanto:

valor verdadeiro

$$\frac{12 \times 13}{26} = 6 \Rightarrow \text{montão} = 6$$ [1]

1 Professores mais antigos, quando estudantes, lembram-se de encontrar este método em seus livros-texto (*Arithmetica Progressiva,* de António Trajano, por exemplo). Por que o ensino desse processo caiu no esquecimento, justamente agora que os processos de aproximação ganham tanta importância? Sim, pois este é um exemplo do uso das aproximações, em que se parte de um valor falso e se procura corrigi-lo para melhorar o resultado, o que, neste caso, tem pleno êxito: chega-se à solução exata.

O moderno sistema de numeração decimal levaria ainda muito tempo para ser criado. Por isso os matemáticos da antiguidade efetuavam todos os seus cálculos em instrumentos auxiliares chamados tabuleiros de cálculos.

Mas por que uma regra de três simples dá o valor verdadeiro de x? Uma simples coincidência ou existe uma razão clara e precisa por trás dela? Observe com atenção: podemos interpretar o enunciado "resolver a equação

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \text{"}$$

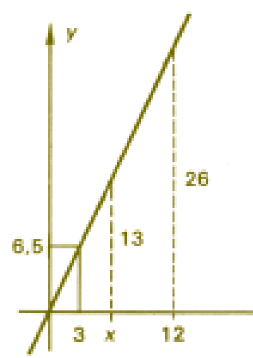
através da idéia moderna de função:

"Se f é uma função cujos valores são dados pela fórmula

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x \quad ,$$

para que valor de x temos $f(x) = 13$?"

Traçamos em primeiro lugar o gráfico de f:



x	f(x)
0	0
3	6,5

Substituímos o "valor falso" 12:

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x$$

$$f(12) = 12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12)$$

$$f(12) = 26; \quad (12, 26)$$

Se representamos o "valor verdadeiro" por x, por semelhança de triângulos podemos escrever:

$$\frac{12}{26} = \frac{x}{13}$$

ou seja:

12 está para 26 assim como
x está para 13

Os antigos matemáticos egípcios e de outros povos também eram capazes de resolver sistemas de equações através deste método.

Você seria capaz de encontrar a solução do seguinte problema-desafio da antiguidade, usando a regra da falsa posição?

"Doze anéis de prata pesam tanto quanto oito anéis de ouro. Se trocarmos um anel de prata por um anel de ouro, a diferença será de 6 tzin. Digam-me, quanto pesa um anel de prata e um anel de ouro?"

NR: O Comitê Editorial da **RPM** oferece alguns complementos:

Sobre o *Papiro de Rhind* (*Ahmes*)

O *Papiro de Rhind* foi encontrado nos meados do século passado, presumivelmente nas proximidades do templo de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, no Egito. Em 1858 foi comprado, no local, pelo antiquário escocês A. H. Rhind.

O papiro é um rolo com cerca de 30 *cm* de altura e 5 *m* de comprimento e encontra-se hoje, salvo alguns fragmentos, no Museu Britânico.

Os egípcios tinham um processo estranho para representar frações: as de numerador 1, como $1/n$, eram representadas por n ou h, mas todas as outras frações (salvo 2/3 e, algumas vezes, $n/n + 1$) eram escritas como soma de frações com numerador 1. Assim, por exemplo,

$$\frac{3}{5} \text{ era } \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}; \quad \frac{2}{7} \text{ era } \frac{1}{4}+\frac{1}{28}.$$

O problema "achar um número que somado com sua sétima parte dá 19"

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

é resolvido no papiro, em três passagens:

1) Elimina-se a fração, colocando-se 7 no lugar de x (7 é o valor falso).

$$7+\frac{1}{7}\cdot 7=8$$

2) Acha-se o número que multiplicado por 8 dá 19 (pela regra da falsa posição $\frac{x}{7}=\frac{19}{8}$).

$$8\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+2+1+19.$$

3) Para se obter a solução, multiplica-se

$$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ \text{por } 7\ \left(x=7\cdot\frac{19}{8}\right)$$

$$x=7\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

Curioso é o fato de – embora os chineses tivessem, já antes de Cristo, regras eficientes para representar frações e operá-las os gregos terem adotado a representação egípcia, e esta ter permanecido em uso na Europa por mais de 1 000 anos.

Regra da "dupla falsa posição"

Usando a regra da falsa posição, pode-se resolver a equação $ax = b$. Se, porém, um problema exigir a solução da equação $ax + b = c$, a regra não funciona.

Supostamente, já antes de Cristo, os babilônios e os chineses usavam, neste caso, a regra da "dupla falsa posição", que ensina o seguinte:

Para achar x tal que $ax + b = c$, atribua a x dois valores "falsos" x_1 e x_2 e calcule $ax_1 + b$ e $ax_2 + b$.

Se $d_1 = ax_1 + b - c$ e $d_2 = ax_2 + b - c$, a proporção

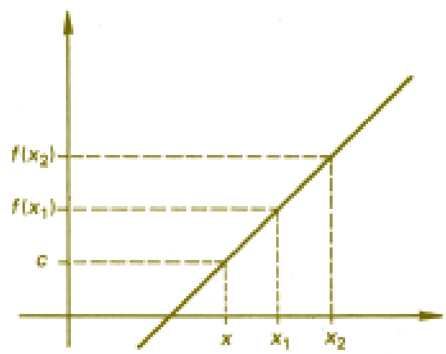
$$\frac{d_1}{x_1 - x} = \frac{d_2}{x_2 - x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

dá o número procurado.

A regra, em linguagem de hoje, é ilustrada na figura abaixo.

Se $f(x) = ax + b$,

$$\frac{f(x_1) - c}{x_1 - x} = \frac{f(x_2) - c}{x_2 - x}$$



Uma outra versão da mesma regra ensina o equivalente a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (*)$$

Tanto uma versão como a outra, quando aplicadas a equações do primeiro grau, dão o valor exato de *x.* Para problemas não lineares a regra poderá dar soluções aproximadas.

Um problema não linear, aparentemente resolvido pela regra da dupla falsa posição, foi encontrado já entre os escritos dos antigos babilônios. Lá perguntava-se em quantos anos duplica um capital de 1 *gur,* a juros de 20% ao ano. Em notação de hoje:

Após 3 anos o capital ficará multiplicado por $(1,2)^3$;

Após 4 anos o capital ficará multiplicado por $(1,2)^4$.

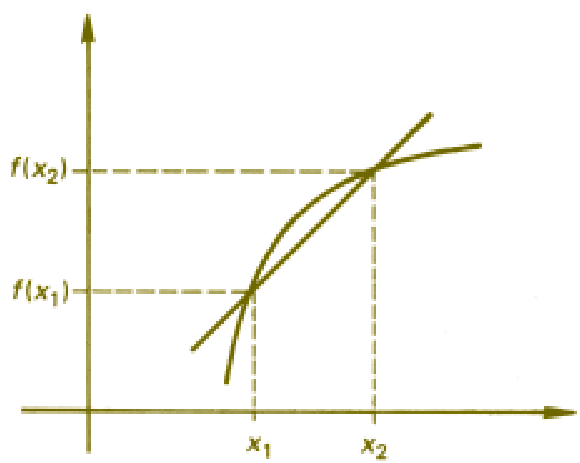
A resposta dada – “de 4 anos deve-se subtrair 2,5 meses” – é a mesma que obteríamos se usássemos a fórmula (*) para a equação

$$(1,2)^x = 2, \quad x_1 = 3 \ \text{ e } \ x_2 = 4$$

Escritos árabes (séc. X) dizem explicitamente que a regra resolve problemas onde só aparecem adições, subtrações, multiplicações e divisões e que não se resolvem com ela problemas em que apareçam raízes quadradas ou cúbicas.

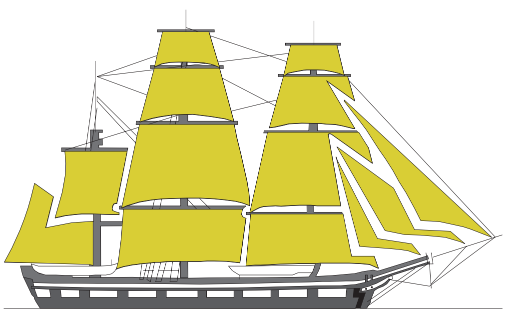
Já Cardano (séc. XVI) usa a regra da dupla falsa posição, repetidas vezes em um mesmo problema, a fim de obter melhores aproximações para a solução.

Hoje em dia, reconhecemos a regra da dupla falsa posição como um processo de aproximação, em que o arco de uma curva é substituído por um segmento de reta secante e exige, no caso não linear, cuidados especiais para que a solução obtida seja realmente uma “solução aproximada”. É o que chamamos de processo da interpolação.



Medidas na carta de Caminha

Mozart Cavazza P. Coelho



Muitas passagens da carta de Pero Vaz de Caminha citam distâncias medidas em *léguas* ou em *braças*, unidades que hoje não se usam mais, a não ser em um sentido bastante impreciso. Vamos tentar entender o que representam essas medidas.

O sistema de pesos e medidas usado em Portugal à época do descobrimento e posteriormente no Brasil, no tempo colonial, apresentava sérios inconvenientes: não era uniforme de região para região, mudava segundo o tempo e as circunstâncias e, além disso, as subdivisões eram numerosas e irregulares, tornando os cálculos trabalhosos e imprecisos.

A tabela seguinte dá uma idéia da variedade de unidades de medida usadas antigamente para distâncias (as igualdades devem ser entendidas sempre como aproximações):

1 polegada →	2,54 cm	
1 pé →	12 polegadas →	30,48 cm
1 passo →	5 pés →	1,52 m
1 palmo →	8 polegadas →	20,32 cm
1 estádio →	125 passos →	190 m
1 toesa →	9 palmos →	1,83 m
1 vara →	5 palmos →	1,02 m
1 jarda →	4 palmos →	81 cm
1 côvado →	3 palmos →	61 cm
1 corda →	15 palmos →	3,05 m
1 braça brasileira →	2,2 m	
1 milha brasileira →	1000 braças →	2200 m
1 légua brasileira →	3000 braças →	6600 m

Qual era a *légua* mencionada na carta de Caminha? A *braça brasileira* é citada no dicionário Aurélio e equivale a 2,2 m, enquanto no sistema inglês a braça equivale a 1,8 m. Uma *légua* é definida no mesmo dicionário como sendo uma medida itinerária igual a 6 000 m. Entretanto, uma *légua de sesmaria* corresponde a 3 000 braças, o que significa 6 600 m. Essas são medidas comumente empregadas para medir distâncias terrestres. Provavelmente, a *légua* citada na carta de Caminha era a *légua marítima*, que ainda diferia da *légua terrestre*.

Considerando a necessidade de uma uniformização, o rei da França, Luís XVI, em maio de 1790, decretou a criação de uma comissão para estabelecer um sistema padronizado de pesos e medidas. A comissão, formada por membros da Academia de Ciências de Paris, decidiu tomar como referência para as medidas de distância o comprimento de um meridiano terrestre. Assim, foi definido o *metro* como sendo o comprimento do meridiano terrestre, dividido por 40 000 000. O comprimento do meridiano foi estabelecido a partir de medições feitas em arcos do meridiano de Paris, entre a torre de Dunquerque e a cidade de Barcelona, comparadas com medições feitas anteriormente no Peru. Foi então construído um padrão para o metro, feito de platina e cuidadosamente guardado, em 1799, no prédio dos Arquivos do Estado, em Paris.

Assim nasceu o atual *sistema métrico decimal*, no qual as subdivisões e os múltiplos do metro são feitos de 10 em 10: temos portanto o centímetro, o decímetro, o milímetro, bem como os múltiplos do metro, como o decâmetro, o hectômetro e o quilômetro.

Atualmente as crescentes necessidades tecnológicas exigem um padrão mais preciso e facilmente reprodutível. O metro é hoje definido como sendo o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Mas voltemos ao tempo do descobrimento do Brasil. Como já mencionamos, a légua a que se refere Caminha em sua carta é, provavelmente, a *légua marítima*, cuja definição também variava de lugar para lugar e de navegador para navegador. No século XVI, considerava-se que um grau do meridiano terrestre correspondia a um certo número de léguas, que alguns navegadores diziam ser 16,7; enquanto outros diziam que era 18 ou mesmo 17,5.

Se o meridiano terrestre mede 40 000 000 m, dividindo esta quantia por 360 teremos que um grau do meridiano eqüivale a aproximadamente 111 111 m. Admitindo que um grau corresponde a 18 léguas, isso nos dá a medida

1 légua marítima = 6 173 m.

No entanto, os registros desses padrões são tão imprecisos, que é possível encontrar documentos atribuindo para a légua marítima o equivalente a 5 555 m.

A *milha marítima* é talvez a única dessas unidades extravagantes que deverá permanecer sendo usada. Ela é hoje definida como valendo 1 852 m, o que a torna igual ao comprimento de um arco de 1 minuto do meridiano terrestre, ou seja, 1/21 600 do comprimento do meridiano. Em navegação, posições são determinadas por ângulos (latitude e longitude), o que torna extremamente cômodo adotar como unidade de distância o comprimento de um arco de ângulo central unitário. Aliás, foi algo parecido com isso o que os matemáticos fizeram ao adotar o radiano.

Felizmente, na atualidade, quase todos os países do mundo adotam o sistema métrico decimal. No Brasil, a lei de 26 de junho de 1862 e o decreto número 5 089 de 18 de setembro de 1872 tornaram o sistema métrico decimal obrigatório a partir de 1º de janeiro de 1874.

Observações

1. As definições das unidades legais de medidas no Brasil são feitas pelo Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – *CONMETRO*.

2. O autor pede para citar seus colegas *Nilton Lapa* (SP) *e Maria Inês V. Faria* (MG), com os quais desenvolveu a atividade que deu origem a este trabalho.

Capítulo 5

Álgebra

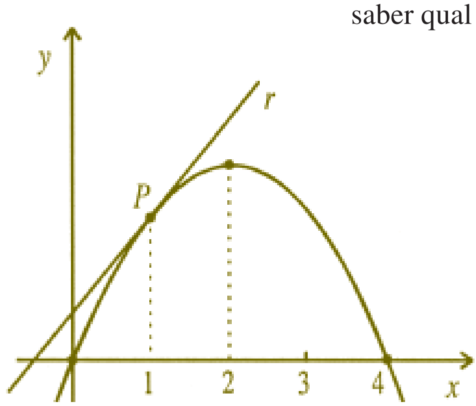
Um professor em apuros

Jesús A. Pérez Sánchez

Introdução

Naquela semana o professor Beremis estranhou a demora dos seus alunos na entrega dos exercícios de Matemática. Quando finalmente eles os apresentaram, seus rostos não refletiam muito entusiasmo.

Ao perguntar sobre o motivo da demora, o professor Beremis inteirou-se de que não tinham resolvido um dos problemas, por falta de dados. O professor viu-se numa situação desagradável, pois era muito cuidadoso na preparação dos exercícios e, embora não tivesse conferido todos os detalhes dos problemas, tinha certeza de ter fornecido os elementos necessários para sua solução. Logo, quis saber qual era a dificuldade. Tratava-se do seguinte problema:



Dada a parábola da figura, encontrar a interseção da reta r, tangente à curva em P, com o eixo O_X.

O argumento da turma era que somente com as informações contidas na figura não podiam achar a equação da parábola e, portanto, a equação de r também não.

O professor escutou atenciosamente o seguinte raciocínio:

A equação geral da parábola é $y = ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são constantes que devem ser determinadas com os dados indicados na figura. Certamente, pode-se afirmar que $a < 0$.

Por outro lado, dado que a curva passa pela origem, temos $c = 0$. Assim, a equação da parábola fica $y = ax^2 + bx$.

Também, visto que o ponto (4,0) está na curva, tem-se $0 = 16a + 4b$, isto é, $b = -4a$.

Então, seria interessante obter uma outra igualdade envolvendo essas constantes para formar um sistema de duas equações com duas incógnitas que, no caso de ser possível e determinado, nos permitiria conhecer os valores de a e b. É oportuno, então, usarmos outra pista indicada no desenho: a abcissa do vértice da parábola é igual a 2. Como a abcissa do vértice da parábola

$$y = ax^2 + bx \text{ é } -\frac{b}{2a},$$

temos

$$-\frac{b}{2a} = 2 \text{, isto é, } b = -4a.$$

Logo, não aparece uma nova relação entre a e b, ficando estabelecido que a equação da parábola é $y = ax^2 - 4ax$, onde a é desconhecida.

O professor Beremis reconheceu que seus alunos estavam certos: com as informações dadas não era possível achar o valor de a.

Entretanto, com seu costumeiro espírito animado, propôs aproveitar o momento para revisar o conceito de reta tangente. Assim começou:

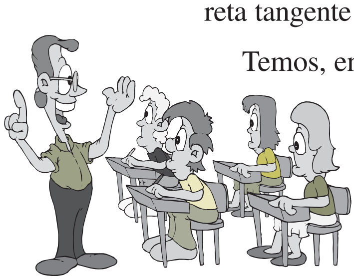
Seja r uma reta (não vertical), com coeficiente angular m e passando pelo ponto (x_1, y_1) da parábola dada por $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Suponha que (x_1, y_1) não coincide com o vértice da parábola (ou seja, $m \neq 0$). A equação de r é $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Nosso intuito é encontrar m, de modo que a reta r tenha (x_1, y_1). Como único ponto em comum com a parábola.

Essa reta r é denominada reta tangente à parábola no ponto (x_1, Y_1) (É bom mencionar que, usando o conceito de derivada, obtém-se uma definição de reta tangente válida para uma curva qualquer, não apenas para parábolas).

Temos, então, o sistema



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$$

que deve ter o ponto (x_1, y_1) como única solução.

Substituindo-se o y da primeira equação na segunda, e usando

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + \mathrm{c},$$

após agrupar e fatorar, vem

$$(x - x_1)[a(x + x_1) + b - m] = 0.$$

Se a única solução dessa equação deve ser $x = x_1$, isso nos conduz a

$$m = 2ax_1 + b.$$

Assim, a equação de r fica

$$y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1).$$

O requerido na tarefa proposta é o valor de x correspondente a $y = 0$. Chamando esse valor de x_0, temos

$$-\,y = (2ax_1 + b)(x + x_1) \quad \text{ou}$$

$$x_0 = \frac{y_1}{2ax_1 + b} + x_1.$$

(Lembrar que $m = 2ax_1 + b \neq 0$.)

Também, no nosso caso particular,

$$x_1 = 1 \text{ e } y_1 = ax_1^2 + bx_1 = a + b.$$

Assim,

$$x_0 = -\frac{a + b}{2a + b} + 1 \;\cdot$$

Nesse instante, os olhos do professor Beremis brilharam e sua face iluminou-se de alegria, pois percebeu que podia resolver o problema mesmo sem conhecer o valor de a. Com efeito, visto que

$$b = -4a, \quad x_0 = \frac{a - 4a}{2a - 4a} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

No final, cada rosto desenhava um sorriso. Não era para menos!

Nota da RPM

Observe que a parábola do Prof. Beremis não é única. Na verdade trata-se de toda uma família de parábolas, $y = ax(x - 4)$, $a < 0$. Duas delas estão ilustradas na figura a seguir, com as respectivas tangentes no ponto $(1, y_1) = (1, -3a)$. Todas essas retas cortam o eixo O_x no ponto

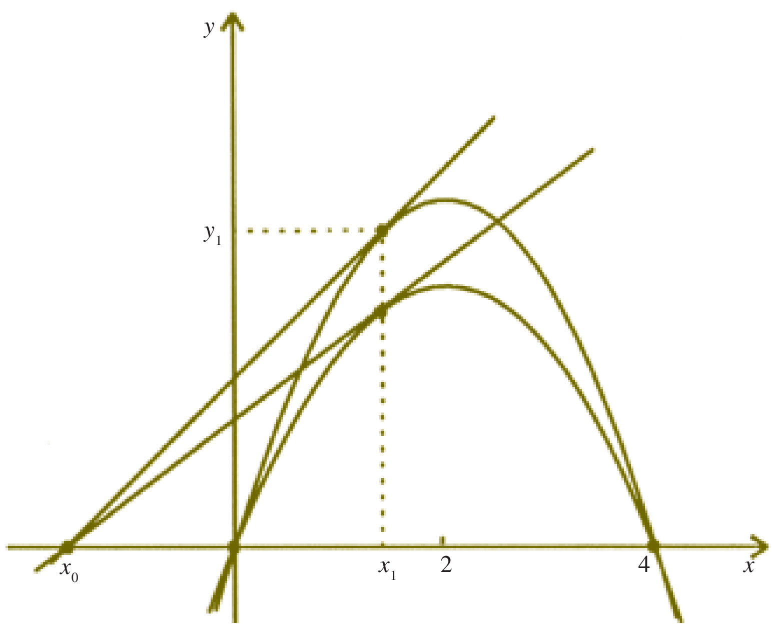
$$x = -\frac{1}{2}.$$

É interessante observar que isso continua verdadeiro mesmo que escolhamos qualquer outro ponto de tangência (x_1, y_1) com $x_1 \neq 2$.

Teremos, então,

$$x_0 = -\frac{y_1}{2a(x_1 - 2)} + x_1 = \frac{-a(x_1)^2 - 4ax_1}{2a(x_1 - 2)} + x_1 = \frac{x_1(4 - x_1)}{2(x_1 - 2)} + x_1.$$

Como a última expressão não depende de a, mas só de x_1, as retas tangentes a todas as parábolas cortam o eixo O_x no mesmo ponto.



Visualizando as equações

Oscar Guelli

Euclides de Alexandria

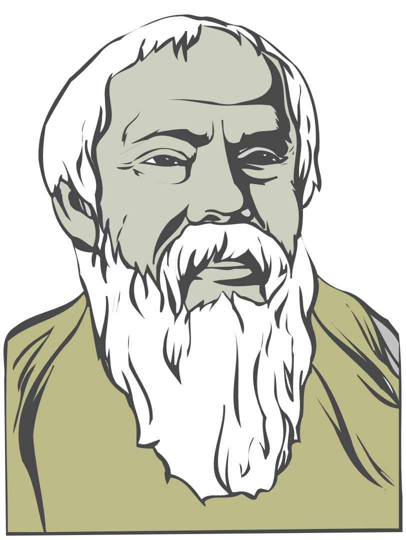
Com a morte de Alexandre, o Grande, no ano 324 a.C, o império mundial que ele havia construído foi dividido entre os seus generais.

O Egito ficou sob o domínio de Ptolomeu.

Na cidade de Alexandria, Ptolomeu criou um centro de ensino e pesquisa chamado Museu, que significa refúgio das musas. Mais de 500 mil manuscritos foram guardados na biblioteca do Museu.

Muitos dos grandes cientistas da época trabalharam nesse Museu. Entre eles estava Euclides de Alexandria.

O Museu funcionava como uma espécie de universidade moderna. Entre os professores, alguns se dedicavam à pesquisa, outros eram bons administradores, e uma parte se destacava pela capacidade de ensinar.



Euclides fazia parte deste último grupo. Foi, provavelmente, por esta razão que o livro *Os Elementos* – escrito por Euclides por volta de 300 a.C. e depois copiado e recopiado centenas de vezes – teve uma repercussão tão grande nos meios científicos. Durante mais de 20 séculos os homens estudaram a Geometria, segundo Euclides.

Todo estudante de Geometria tem uma dívida de gratidão para com Euclides. Mas os estudantes de Álgebra também devem saber algo sobre ele.

Para um estudante de hoje, a Álgebra começa quando as quantidades desconhecidas passam a ser representadas por letras.

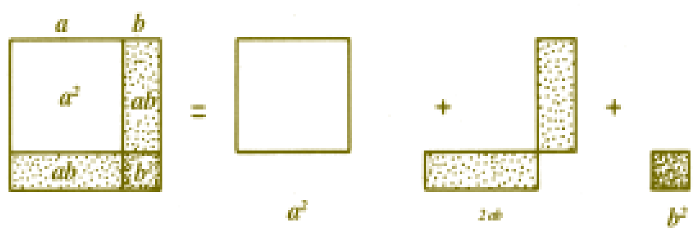
Na sua “Álgebra” Euclides representava as quantidades desconhecidas por segmentos de retas, quadrados, retângulos, triângulos, etc.

A Álgebra Geométrica

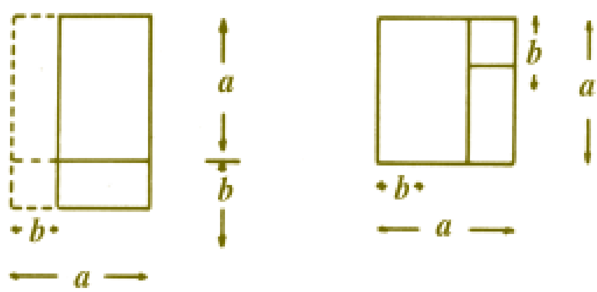
Veja: nós entendemos o produto notável $(a + \mathrm{b})^2$ como “o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo”, isto é,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Euclides e seus colegas de Alexandria também manejavam com muita facilidade este produto notável, mas interpretando-o através desta construção geométrica:



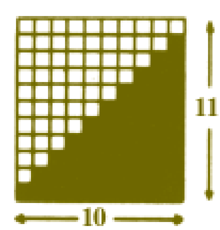
Você consegue reconhecer nesta construção geométrica:



o produto notável

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2\ ?$$

Ou através da figura ao lado você consegue entender por que



$$1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

e assim conseguir demonstrar que

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ?$$

Euclides realiza muitas construções semelhantes a estas em *Os Elementos***,** utilizando-se somente de uma régua e de um compasso. Além disso, a régua não tem qualquer tipo de marcação, nela não está assinalado nenhum milímero, nenhuma medida.

Euclides e os antigos matemáticos preocupavam-se apenas com as relações que podiam obter geometricamente. Para eles, os cálculos e as medidas eram para serem efetuados unicamente por escravos.

Um problema simples como este, formulado pelos matemáticos egípcios, há cerca de 4 000 anos:

Um número, o seu dobro,
a sua terça parte,
todos ao juntar-se fazem 10.
Diga-me, qual é o número?

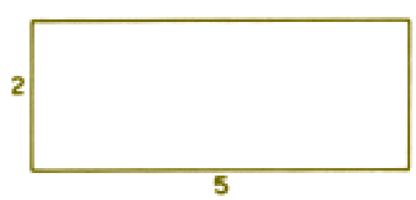
aprendemos a expressar através de uma equação:

$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10.$$

No tempo de Euclides a Álgebra simbólica estava ainda muito distante de ser inventada; por isso os matemáticos da antiguidade usavam construções geométricas para estudar equações.

Veja como podemos *visualizar* a resolução desta equação por meio de um método descrito por Euclides no livro 2 de ***Os Elementos*****,** e que passou para a história com o nome de *Álgebra Geométrica*:

· Em primeiro lugar construímos um retângulo de área 10.



Ao invés do retângulo anterior, poderíamos ter desenhado qualquer outro, cujos lados tivessem estas medidas: 10 e 1, 4 e 2,5 , 1,25 e 8 etc. Procuramos traduzir o problema através de área de figuras planas. Esta primeira construção corresponde à seguinte passagem na equação:

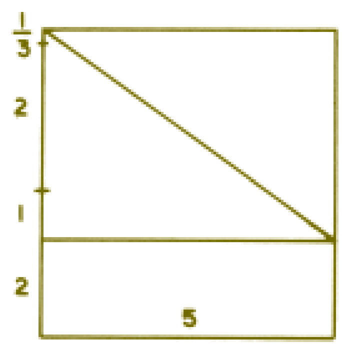
$$x + 2x + \frac{x}{3} = 10 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x + 2x + \frac{x}{3} = 5 \times 2.$$

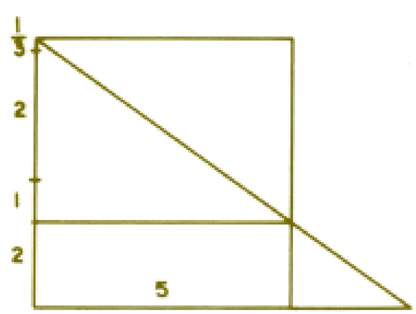
- "Anexamos" a este retângulo, era assim que se escrevia antigamente, um novo retângulo de lados 5 e

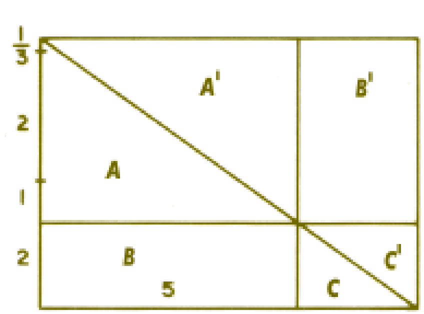
$$1 + 2 + \frac{1}{3}.$$

$$x \cdot (\, 1 + 2 + \frac{1}{3}.) = 5 \cdot 2$$



- Com os passos seguintes vamos construir um outro retângulo de área igual à área do retângulo de lados 5 e 2. Por isso, prolongamos a diagonal do retângulo até ela cortar o prolongamento do lado 5 e formamos um outro retângulo:





Observe:

área de A + área de B + área de C = área de A' + área de B' + área de C

Como área de A = área de A' e área de C = área de C'
temos que área de B = área de B.

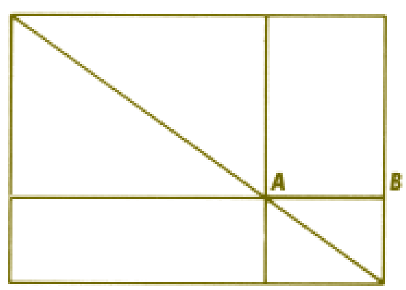
Portanto,

$$x \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot 2.$$

Para os matemáticos de hoje, a resposta do problema é o número real

$$x = \frac{5\,.\,2}{1 + 2 + \frac{1}{3}} = \ldots\ = 3.$$

A "Álgebra" de Euclides significa a construção desta figura



e a solução da "equação" é o segmento AB.

Dois motivos impediram que a Álgebra Geométrica tivesse um papel muito mais destacado no estudo das equações na Matemática:

• um motivo político: a sociedade grega desta época era escravocrata e o desenvolvimento da ciência refletia a estrutura social. Assim, os antigos matemáticos gregos consideravam os cálculos com números e medidas um assunto de escravos, indigno de cidadãos livres;

• o outro motivo era puramente matemático: os antigos matemáticos gregos ficaram surpresos e desnorteados ao descobrirem que havia alguns problemas impossíveis de serem resolvidos por meio da Álgebra Geométrica de Euclides.

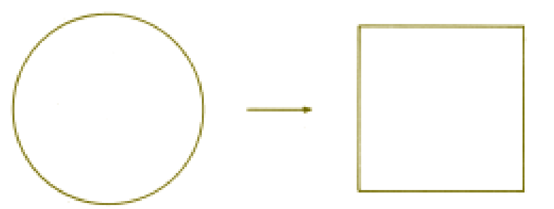
Mas não foram somente eles.

Por mais de 2 000 anos, matemáticos de outros povos também tentaram resolver esses problemas, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

E a história de um destes problemas, chamados de *problemas insolúveis da antiguidade*, é que vamos discutir.

A quadratura do círculo

Quando uma pessoa está fazendo um cálculo errado, absurdo, é comum dizer que ela quer "quadrar o círculo".



Esta expressão significa, simplesmente, que dado um círculo devemos construir um quadrado que tenha exatamente a mesma área do círculo, usando somente uma régua não graduada e um compasso.

E muito fácil construir um quadrado de área aproximadamente igual a de um círculo dado.

Veja: a área de um círculo de raio r é igual a πr^2. Construir um quadrado de área igual à de um círculo de raio 1 equivale a construir um segmento l dado por

$$l\ .\ l = \pi 1^2 \text{ ou seja } l = \sqrt{\pi}$$

Sabemos que $\pi \approx 3{,}14$ e, portanto, $l \approx 1{,}772$. Podemos, agora, construir um quadrado de lado 1,772 – a sua área será *aproximadamente* igual à área do círculo de raio 1.

Durante cerca de 20 séculos, os mais brilhantes matemáticos de todo o mundo não conseguiram construir, usando somente régua e compasso, um quadrado que tivesse exatamente a mesma área que um círculo dado.

É este o significado da Álgebra Geométrica de Euclides: efetuar construções com régua e compasso seguindo os passos da demonstração de um teorema.

Os numerosos esforços para quadrar o círculo duraram desde o século 3 a.C. até o século 19.

Em 1882, um matemático alemão, chamado Lindemann, mostrou a impossibilidade de se resolver o problema através da Álgebra Geométrica: é impossível construir o segmento $\sqrt{\pi}$, usando-se apenas uma régua e um compasso. A demonstração requer uma Matemática bastante sofisticada.

A Álgebra Geométrica dos antigos matemáticos gregos e a regra da falsa posição do Egito Antigo representaram, de um certo modo, o esforço dos matemáticos da antiguidade para encontrar uma linguagem apropriada para as equações.

Mas os dois métodos apresentavam falhas:

- a Álgebra Geométrica não tinha resposta para vários problemas;
- a regra da falsa posição parecia uma "receita", sem nenhuma justificação ou explicação.

Por volta do ano 400 d.C, uma idéia simples e audaciosa de um matemático de Alexandria, chamado Diofante, iria começar a mudar todo o aspecto da Matemática: começavam a surgir os primeiros símbolos matemáticos, inicialmente na forma de abreviação de palavras.

Mas, esta já é uma outra história.

Uma equação interessante

Cláudio Possani

Há algum tempo, o professor Sidney Luiz Cavallanti mostrou-me a equação

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \quad (1)$$

e fez a seguinte observação: "Apesar de, no decorrer da resolução, elevarmos as equações somente a potências *ímpares* (duas elevações ao cubo), ainda assim, surpreendentemente, aparece uma raiz falsa. Por quê?"

Antes de mostrar como o professor Sidney resolveu a equação, vejamos o porquê da sua surpresa.

Sabemos que

$$x=y \;\Rightarrow\; x^n=y^n,\;\; \forall\, x,y\in \mathbb{R},\;\; \forall\, n\in \mathbb{N}$$

mas a recíproca desta afirmação só é verdadeira se n for ímpar. Isto é,

$$x^n=y^n \;\Rightarrow\; x=y,\;\; \forall\, x,y\in \mathbb{R}\;,$$

se n for ímpar.

É fácil ver que a propriedade $x^n = y^n \Rightarrow x = y$ não vale se n for par – basta observar que

$$5^2=(-5)^2 \text{ e } 5\neq -5.$$

Estes fatos aparecem nitidamente quando, no final do ensino fundamental, resolvemos com nossos alunos as equações irracionais. Vejamos um exemplo: Resolver

$$\sqrt{2x-3} = x-3 \overset{1}{\Rightarrow} (\sqrt{2x-3})^2 = (x-3)^2 \overset{2}{\Leftrightarrow} 2x-3 =$$

$$= x^2-6x+9 \overset{3}{\Leftrightarrow} x^2-8x+12 = 0 \overset{4}{\Leftrightarrow} x = 6 \text{ ou } x = 2.$$

As passagens 2, 3 e 4 são equivalências, mas a recíproca da implicação 1 não é verdadeira. É por isso que, após resolvermos a equação, "testamos" as raízes encontradas para ver se elas, de fato, satisfazem a equação inicial. No exemplo, 6 é raiz de (2), mas 2 não o é.

Portanto, estamos acostumados com o aparecimento de "falsas raízes" na resolução de equações irracionais.

Mas, no exemplo que o professor Sidney apresentou, o fato de aparecer uma "raiz falsa" era estranho, pois a resolução da equação exigia apenas que seus membros fossem elevados ao cubo, e sabemos que, em *R*,

$$x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y.$$

Vejamos como o professor Sidney resolveu a equação:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1 \quad (1)$$

Elevando ao cubo, obtemos

$$2x-1+3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + x-1 = 1 \qquad (2)$$

$$3x-2+3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \qquad (3)$$

o termo entre parênteses vale 1 (é a própria equação 1!)

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 \qquad (4)$$

$$3x+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 \qquad (5)$$

$$\sqrt[3]{2x^2-3x+1} = 1-x \qquad (6)$$

$$2x^2-3x+1 = (1-x)^3 \qquad (7)$$

$$2x^2-3x+1 = 1-3x+3x^2-x^3 \qquad (8)$$

$$x^3-x^2 = 0 \qquad (9)$$

E, portanto, $x = 0$ ou $x = 1$ ■

Verifica-se, por substituição em (1), que 1 é solução, mas 0 não é.

Onde e por que apareceu esta falsa raiz?

Sugiro que o leitor tente responder à esta pergunta antes de prosseguir.

Observe que $x = 0$ não é solução das equações (1), (2) e (3), mas é solução das equações a partir de (4). Na verdade, (1), (2) e (3) são equivalentes entre si (possuem o mesmo conjunto solução), e as equações de (4) a (9) também são equivalentes entre si, mas (3) e (4) não são equivalentes. Foi nesta passagem que fizemos algo "ilícito".

O que fizemos para passar de (3) a (4)? Ora, usamos novamente a equação (1) substituindo

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}$$

por 1, e este procedimento não gera uma equação equivalente à anterior. Tendo duas equações equivalentes, (1) e (3), se substituirmos uma na outra, obtemos uma nova equação que é conseqüência das anteriores, mas não é, necessariamente, equivalente a elas. Assim (3) $\Rightarrow$ (4), mas não vale a recíproca.

Vejamos um exemplo onde este fato é mais evidente:

$x = 2$ (o conjunto solução é $\{2\}$),

$2 = x$ (equivalente a de cima).

Substituindo uma na outra, obtemos $x = x$, cujo conjunto solução é IR !

Assim, o aparecimento de uma raiz falsa não está ligado ao fato de a equação ser irracional nem às potências que tomamos, e sim. ao procedimento da resolução.

Uma palavra sobre a abordagem deste tema em sala de aula: o "truque" utilizado na passagem de (3) para (4) é útil, pois "limpou" a equação, mas não é uma equivalência – não podemos perder de vista a equação original. Situações como esta são comuns, por exemplo, na trigonometria, quando usamos numa equação a identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vamos ilustrar o aparecimento de falsas raízes por meio de mais dois exemplos:

$$x = 1 - x \text{ (e, portanto, } x = 1/2\text{).}$$

Se elevarmos ambos os membros ao cubo, teremos:

$$x = 1 - x \Leftrightarrow x^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow$$

(substituindo x por $1 - x$)

$x^3 = 1 - 3(1 - x) + 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2; x = -1; x = 2$ ■

Outro exemplo:

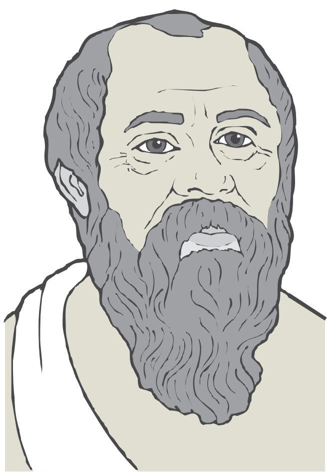
$$x = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

(substituindo x por 1)

$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1, \blacksquare$$

As ternas pitagóricas (novamente!)

Cláudio Arconcher



Muito freqüentemente, mencionamos em sala de aula a terna de números pitagóricos 3, 4, 5. Uma forma natural de introduzi-la é, após o estudo do Teorema de Pitágoras, propor à classe encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo sabendo que são números inteiros e consecutivos. Podemos, em seguida, propor a generalização natural desta questão: determinar todas as ternas de números inteiros que sejam as medidas dos lados de algum triângulo retângulo. Explicamos, então, que uma terna de tais números é chamada *reduzida* se seus componentes não tiverem fator comum distinto da unidade.

A resposta para essa questão é dada pelo seguinte teorema:

Se p e q tomam todos valores inteiros, restritos somente pelas condições

(1) $p > q > 0$,

(2) p e q são primos entre si,

(3) p e q não são ambos ímpares,

então as expressões $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$ fornecerão todas as ternas pitagóricas reduzidas, e cada terna somente uma vez.

Normalmente encerramos a questão por aqui. Há, porém, uma curiosidade perfeitamente pertinente que podemos acrescentar, enriquecendo o assunto. Trata-se da seguinte propriedade:

Em qualquer terna pitagórica reduzida, os números 3, 4 *e* 5 *estão presentes.*

Devemos entender que 3, 4 e 5 estão presentes como fatores dos elementos da terna, eventualmente os três números como fatores de um mesmo elemento. Por exemplo, usando o teorema mencionado anteriormente com $p = 6$ e $q = 5$, obtemos a terna pitagórica reduzida (11, 60, 61) onde 3, 4 e 5 são fatores de 60.

Minha atenção foi despertada por um aluno, Frederico, que me disse ter lido tal afirmação no livro *Maravilhas da Matemática,* do nosso Malba Tahan.

Para demonstrar a propriedade, usamos o teorema mencionado. Seja então uma terna pitagórica $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$, com p e q naturais restritos às condições (1), (2) e (3).

- O fator 4 sempre vai estar no elemento $2pq$.

E óbvio por (3), pois um dos números, p ou q, é par.

- Se o fator 3 não ocorrer no elemento $2pq$, então ele estará em $p^2 - q^2$.

De fato, dividindo p e q por 3, encontraremos resto 1 ou 2, ou seja, estes números são da forma $3k + 1$ ou $3k + 2$. Em qualquer caso, o quadrado *é* da forma $3k + 1$. Portanto, a diferença $p^2 - q^2$ de dois números da forma $3k + 1$ é divisível por 3.

- Se o fator 5 não ocorrer no elemento $2pq$, então ele estará em $p^2 - q^2$ ou em $p^2 + q^2$.

De fato, dividindo p e q por 5, encontraremos para resto um dos números: 1, 2, 3 ou 4. Isto é, p *e* q são de uma das formas: $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, ou $5k + 4$. O quadrado de qualquer um desses números é da forma $5k + 1$ ou $5k + 4$. Assim, se p e q forem do mesmo tipo ($5k + 1$ ou $5k + 4$), $p^2 - q^2$ será múltiplo de 5. Caso contrário, o fator 5 estará em $p^2 + q^2$.

Moral da história:

Numa terna pitagórica não há como escapar dos números 3, 4 e 5!

O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções

Maria Alice Gravina

Na minha experiência como professora de alunos calouros do curso de Matemática da UFRS, constatei o quanto os alunos vêm presos ao uso de tabelas na construção de gráficos de funções. E isto faz com que percam a idéia mais geral sobre o comportamento da função. Com a tabela o problema se reduz à marcação de alguns pontos do gráfico por meio de avaliação em valores de x (geralmente, $x = 0, +1, -1, +2, -2$), tornando-se um exercício meramente computacional, sem muito raciocínio.

O que pretendo neste artigo é dar uma idéia de como podemos fazer nossos alunos de ensino médio, através de raciocínios simples, obterem informações sobre gráficos, especialmente sobre forma das curvas; a tabela entra como um recurso, mas não como o único recurso.

Vamos aqui nos deter no estudo da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Começaremos com a função quadrática mais simples e, gradativamente, chegaremos à função quadrática geral.

Caso I

$f(x) = x^2$

Observamos que conforme o valor absoluto de x aumenta, x^2 aumenta mais rapidamente e, portanto, a curva no gráfico deve ser do tipo "voltada para cima". Com esta informação e mais a tabela obtemos o gráfico:

x	$f(x)$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

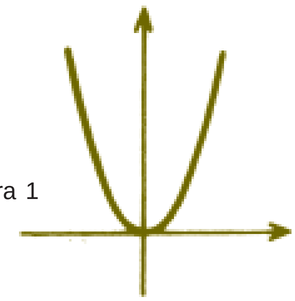


Figura 1

Caso II

$f(x) = -x^2$

O gráfico desta função são os pares de pontos $(x, -x^2)$

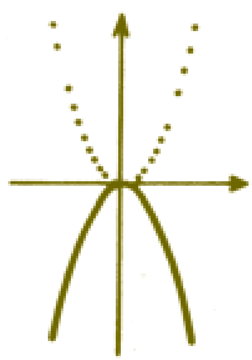


Figura 2

Como já conhecemos o gráfico de $y = x^2$, usaremos este como auxílio (curva pontilhada na Figura 2).

Localizamos o ponto (x, x^2), marcamos no eixo y o valor $-x^2$ e localizamos o ponto $(x, -x^2)$. Vemos assim que o gráfico de f é o **simétrico de** $y = x^2$ **em relação ao eixo** x**.**

Caso III

$f(x) = ax^2$

Nesta situação vamos considerar os casos:

1. $a > 0$

Aqui o gráfico de f tem a forma de $y = x^2$, sendo exatamente igual quando $a = 1$. Usamos novamente o gráfico de $y = x^2$ como auxílio (curva pontilhada nas Figuras 3 e 4).

Localizamos o ponto (x, x^2), $x \neq 0$ e vamos localizar o ponto (x, ax^2):

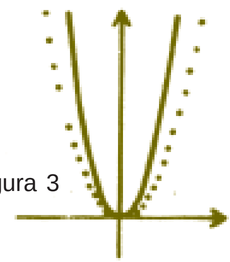


Figura 3

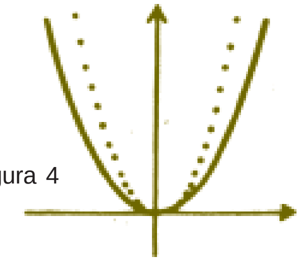


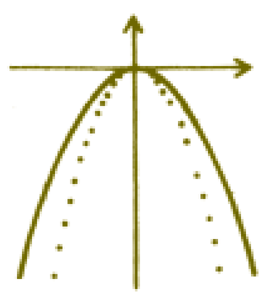
Figura 4

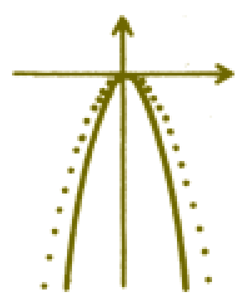
1.1 para $a > 1$, tomos $ax^2 > x^2$ e, portanto, o ponto (x, ax^2) está acima de (x, x^2), na mesma reta vertical. Isto significa que o gráfico de f está acima de $y = x^2$, exceto na origem (Figura3).

1.2 para $0 < a < 1$, temos $ax^2 < x^2$ e, portanto, o ponto (x, ax^2) está abaixo de (x, x^2), na mesma reta vertical. Isto significa que o gráfico de f está abaixo do gráfico de $y = x^2$, exceto na origem (Figura 4).

2. $a < 0$

Aqui o gráfico de f tem a forma, de $y = x^2$ (curva pontilhada nas Figura 5 e 6) e neste ponto o leitor deve se convencer de que os gráficos que se obtêm são:


$-1 < a < 0$
Figura 5


$a < -1$
Figura 6

Caso IV

$f(x) = x^2 + h$

0 gráfico de f tem a forma de $y = x^2$, sendo igual quando $h = 0$. Vamos usar este último gráfico como auxílio (curva pontilhada nas Figuras 7 e 8). Localizamos o ponto (x, x^2) e marcamos no eixo y o valor $x^2 + h$.

1. Se $h > 0$, temos $x^2 + h > x^2$, e portanto o ponto $(x,\ x^2 + h)$ está acima de $(x,\ x^2)$, na mesma reta vertical. Vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$", deslocando-se este último de h unidades para cima (Figura 7).

2. Se $k < 0$, com raciocínio análogo ao anterior, vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de $-h$ unidades para a direita (Figura 8).

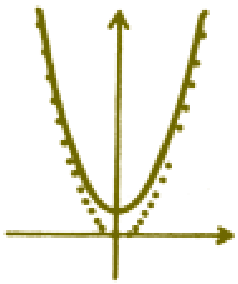


Figura 7

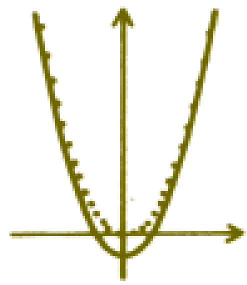


Figura 8

Caso V

$f(x) = (x + k)^2$

Vamos usar novamente o gráfico de $y = x^2$ como auxílio (curva pontilhada nas figuras 9 e 10). Começamos marcando os valores x e $x + k$ no eixo x, o ponto $(x + k,\ (x + k)^2)$ no gráfico de $y = x^2$, e queremos localizar $(x,\ (x + k)^2)$.

1. Se $k > 0$, temos $x < x + k$ e, portanto, o ponto $(x,\ (x + k)^2)$ se encontra à esquerda de $(x + k, (x + k)^2)$, na mesma reta horizontal. Vemos assim que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de k unidades para a esquerda (Figura 9).

2. Se $k < 0$, com raciocínio análogo ao anterior, vemos que o gráfico de f é obtido a partir de $y = x^2$, deslocando-se este de $-k$ unidades para a direita (Figura 10).

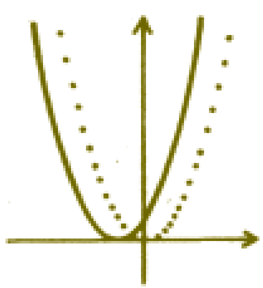


Figura 9

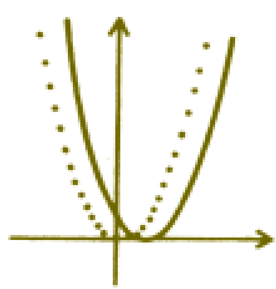


Figura 10

Caso VI

$f\{x) = a(x + k)^2 + h$

Por meio dos casos analisados anteriormente obtemos facilmente o gráfico de f e o leitor já deve perceber que estamos no caso geral de função quadrática. Resolvemos o problema fazendo, sucessivamente, os gráficos de $y = (x + k)^2$, $y = a(x + k)^2$, $y = a(x + k)^2 + h$, e para efeitos de figura vamos tomar $a > 0$. mais particularmente, $a > 1$, $k < 0$ e $h > 0$ (Figuras 11, 12 e 13):

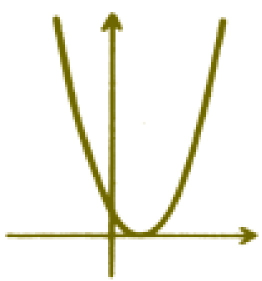


Figura 11

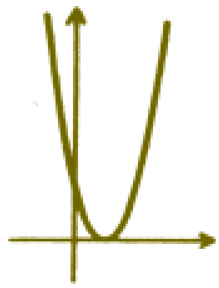


Figura 12

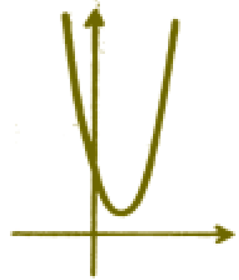
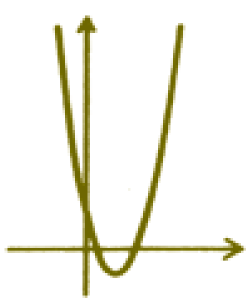
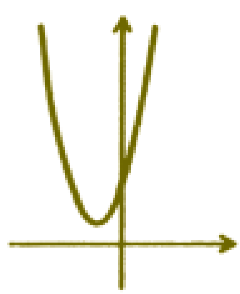


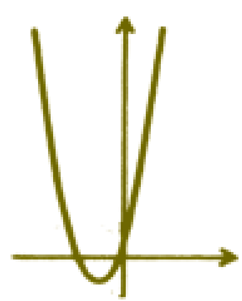
Figura 13

O leitor deve se convencer que as demais possibilidades para o gráfico de f são:

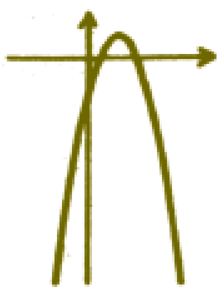
1. $a > 0$


$k < 0$; $h < 0$

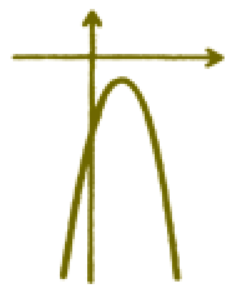

$k > 0$; $h > 0$


$k > 0$; $h < 0$

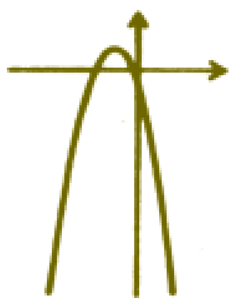
2. $a < 0$



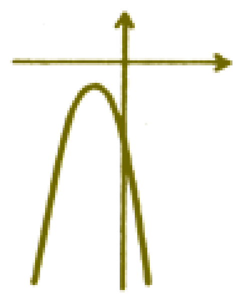
$k < 0 \; ; \; h > 0$



$k < 0 \; ; \; h < 0$



$k > 0 \; ; \; h > 0$



$k > 0 \; ; \; h < 0$

Se a função quadrática for dada na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, usamos o procedimento de *completar quadrados:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{2a}\right)$$

sendo esta expressão final de f do tipo $a(x + k)^2 + h$, com $k = b/2a$ e $h = (4ac - b^2)/2a$, estamos aqui com as informações necessárias para traçar o gráfico de f. E ainda da expressão final de f obtemos facilmente:

1. As coordenadas do vértice V do gráfico:

Se $a > 0$, o menor valor de f é atingido em $x = -b/2a$ e este valor é $(4ac - b^2)/2a$, donde

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{2a} \right)$$

Se $a < 0$, obtém-se analogamente as mesmas coordenadas para V.

2. As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$:

O gráfico encontra o eixo x, se, e somente se,

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{2a} = 0 \quad \text{isto é} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a^2}$$

Vemos que esta equação tem raízes quando $b^2 - 4ac \geq 0$ e, neste caso, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neste final gostaria de salientar que as ideias usadas neste artigo podem se aplicar a outras situações. Uma vez conhecido o gráfico de $y = f(x)$, obtemos facilmente os gráficos das funções $y = f(x + k)$, $y = af(x)$ e $y = f(x) + h$.

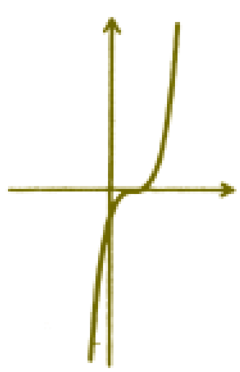


Figura 14

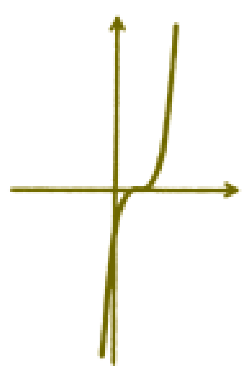


Figura 15

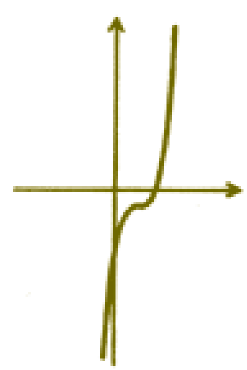


Figura 16

Por exemplo, a partir de $y = x^a$ obtemos o gráfico de $y = 2(x - 1)^a - 1$, fazendo sucessivamente os gráficos de $y = (x - 1)^a$, $y = 2(x - 1)^a$ e $y = 2(x - 1)^a - 1$ (Figuras 14, 15 e 16).

Ainda da minha experiência, quero registrar que este tipo de abordagem para gráficos sempre entusiasma os alunos, pois deste modo eles enxergam a forma da curva e sentem-se seguros ao fazerem os traçados.

Finalizo, registrando os meus agradecimentos ao estudante Leonardo Gick, pelo seu trabalho na confecção dos gráficos apresentados no texto (original).

Média Harmônica

Seiji Hariki

As médias mais conhecidas pelos estudantes e professores de Matemática são a aritmética e a geométrica. Neste artigo, apresento aos leitores uma outra média, a *média harmônica*.

Vejamos primeiro como a média harmônica aparece naturalmente acoplada às médias aritmética e geométrica. Consideremos as relações seguintes, envolvendo os números reais a, b e c, positivos e distintos:

$$(a - b) / (b - c) = a / a \qquad (1)$$

$$(a - b) / (b - c) = a / b \qquad (2)$$

$$(a - b) / (b - c) = a / c \qquad (3)$$

Notemos que essas equações diferem apenas nos segundos membros: na equação (1) o denominador do quociente é a, na (2) é b, e na (3) é c.

Isolando b na equação (1), obtemos

$$b = (a + c)/2,$$

ou seja, b é a *média aritmética* de a e c; isolando b na equação (2), obtemos

$$b = \sqrt{ac}\ ,$$

ou seja, b é a *média geométrica* de a e c; isolando b em (3), obtemos

$$b = 2ac/(a + c),$$

ou seja, b é a *média harmônica* de a e c.

O que é média harmônica

Um outro modo de introduzir a média harmônica é pela definição formal. Sejam a e b dois números reais positivos. A *média harmônica MH* de a e b é o inverso da média aritmética dos inversos desses números:

$$1/MH = (1/a + 1/b)/2 \quad \text{ou}$$
$$MH = 2ab/(a + b).$$

Substituindo $(a + b)/2$ por MA e $a \cdot b$ por $(MG)^2$, obtemos as relações:

$MH \cdot MA = a \cdot b$ e $MH \cdot MA = (MG)^2$.

A última igualdade diz que a média geométrica de a e b é igual à média geométrica das suas médias aritmética e harmônica. Reescrevendo essa equação na forma de proporção, obtemos:

$$MA/MG = MG/MH,$$

relação essa que será utilizada logo a seguir na representação geométrica da média harmônica.

Como surgiu a média harmônica

Exploremos um pouco mais a equação $MH \cdot MA = a \cdot b$. Dela obtemos $a / MH = MA / b$. Essa proporção pode ser reescrita à moda de Euclides:

$$a : MH :: MA : b \quad (*),$$

que se lê "a está para MH assim como MA está para b", ou, utilizando-se propriedades de proporções,

$$b : MA :: MH : a.$$

Por exemplo, consideremos os valores $a = 6$ e $b = 12$. Nesse caso, MH e MA são também inteiros: $MH = 8$ e $MA = 9$. Logo, vale a proporção

$$12 : 9 :: 8 : 6 .$$

Segundo o historiador português *Almeida Vasconcellos*, a proporção (*) já era conhecida pelos babilônios. No entanto, coube ao matemático grego

Pitágoras, que viveu por volta do ano 550 a.C., a descoberta de que essa proporção tinha algo a ver com a música.

Pitágoras descobriu que os comprimentos *x, y, z*, *w* de uma corda vibrante, correspondentes a uma nota (digamos dó), à sua quarta (fá), à sua quinta (sol) e à sua oitava (dó), estão entre si assim como os números 12, 9, 8, 6. Na notação de Euclides,

$$x : 12 :: y : 9 :: z : 8 :: w : 6 \text{ ou,}$$
$$\text{em razões, } x/12 = y/9 = z/8 = w/6.$$

Quanto à origem do nome, parece que foi *Arquitas*, que viveu por volta do ano 400 a.C., o primeiro a chamar de *harmônica* a média que antes dele era conhecida como subcontrária.

Como desenhar a média harmônica

A representação geométrica da média harmônica apareceu bem depois de sua definição. Sabe-se por exemplo que, por volta do ano 300 a.C., o matemático grego *Pappus* representava num único desenho as três médias - a aritmética, a geométrica e a harmônica. Na figura 1, $AD = a$ e $DB = b$. Podemos ver que o raio OC é a média aritmética de a e b e a altura CD do ΔOCD é a sua média geométrica. Traçando-se DE perpendicular ao lado OC, obtemos um ΔDCE que é semelhante ao ΔOCD. Daí, utilizando a proporção (*), concluímos que CE é a média harmônica de a e b.

A Figura 1 sugere que a média harmônica é sempre menor que a média geométrica e que esta, por sua vez, é menor que a média aritmética, exceto no caso-limite $a = b$, quando as três médias coincidem. Os leitores estão convidados a dar uma demonstração analítica desses fatos.

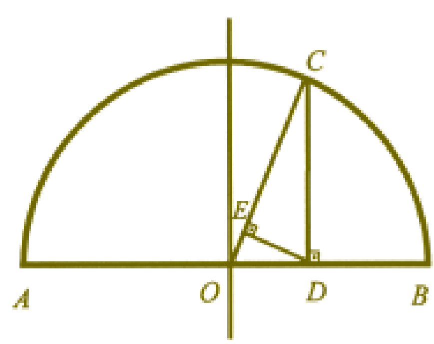


Figura 1

Outro desenho da média harmônica

Existe uma construção alternativa da média harmônica, bem pouco conhecida e que, a meu ver, é muito mais sugestiva do que a de Pappus.

Assinalam-se dois pontos quaisquer A e B de uma reta (Figura 2). Por eles levantam-se segmentos de reta AC e BD, com comprimentos a e b, perpendiculares à reta. Ligam-se as extremidades de um segmento com as extremidades do outro. Pelo ponto de interseção E dos segmentos internos, levanta-se a paralela aos segmentos AC e BD, que determinará o segmento FG entre os segmentos externos. Os leitores poderão mostrar que o comprimento desse segmento é a média harmônica de a e b.

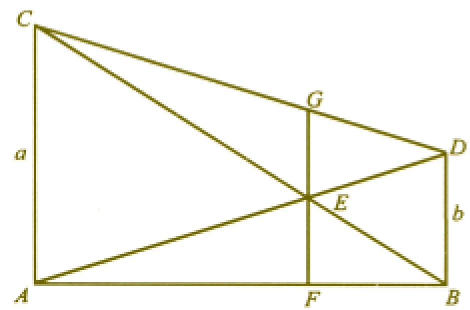


Figura 2

Ao refletir um pouco sobre essa construção geométrica da média harmônica, podemos observar alguns fatos interessantes.

Primeiro, a média harmônica não depende dos pontos A e B que assinalamos na reta; se tomarmos outros pontos A' e B' sobre a reta e fizermos as mesmas construções, obteremos um segmento cujo comprimento é a média harmônica de a e b.

Segundo, a média harmônica não depende da inclinação dos segmentos iniciais em relação à reta-base; a única coisa que importa é o paralelismo dos segmentos AC e BD (Figura 3).

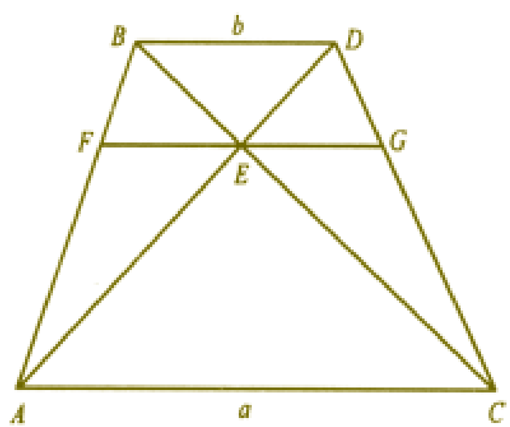


Figura 3

$$FG = MH(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Terceiro, se aumentarmos indefinidamente o valor de a, mantendo fixo o valor de b, a *MH* de a e b permanecerá sempre menor que o dobro de b. Em outras palavras, a *MH* é limitada superiormente pelo dobro do mínimo entre a e b; ela não "explode" (isto é, não cresce além de qualquer limite) quando só um dos números "explode", contrariamente ao que acontece com as médias aritmética e geométrica.

E por último, quando fazemos o valor de a tender a zero, mantendo o valor de b fixo, a *MH* também tende a zero, enquanto a média aritmética permanecerá sempre maior que a metade de b. Nesse caso, a média geométrica tem o mesmo comportamento que a média harmônica.

Onde aparece a média harmônica

São inevitáveis as perguntas pragmáticas que alunos e professores costumam fazer: Para que serve o estudo da média harmônica? Onde se aplica a média harmônica?

Sem a pretensão de responder cabalmente a essas perguntas, vou apenas salientar a importância da média harmônica, assinalando a sua presença em alguns problemas da vida prática.

• O problema das velocidades

O sr. Mário, um imprudente vendedor de filtros de água, costuma acordar cedo e viajar de carro, da cidade A até a cidade B, com a velocidade média de 120 km/h. Depois de visitar seus clientes e tomar com eles algumas garrafas de cerveja, ele volta de B para A, com a velocidade média de 60 km/h. Qual é a velocidade média que o sr. Mário desenvolve no percurso todo?

A resposta mais imediata que surge em nosso cérebro é que a velocidade média no percurso todo é a média aritmética das velocidades na ida e na volta, o que daria 90 km/h. Essa resposta, embora "intuitiva", está errada! Temos que estar sempre alertas, à maneira dos escoteiros, para não deixar a razão Matemática ser desgovernada por falsas "intuições".

A resolução correta do problema é a seguinte. Sejam:

d, a distância entre as cidades A e B,

v_1, a velocidade média na ida,

v_2, a velocidade média na volta,

t_1, o tempo de viagem na ida,

t_2, o tempo de viagem na volta.

Temos então que $d = v_1 t_1 = v_2 t_2$. Se v é a velocidade média no percurso todo, temos:

$$2d = v\ (t_1 + t_2).$$

Logo,

$$2d = v\ (d/v_1 + d/v_2).$$

Simplificando:

$$v = 2v_1 v_2 /(v_1 + v_2).$$

Substituindo os valores v_1= 120 km/h e v_2= 60 km/h, obtemos v = 80 km/h.

Moral da história: a velocidade média no percurso todo é a média harmônica das velocidades na ida e na volta.

A média harmônica geralmente aparece em problemas que envolvem velocidades, vazões, freqüências e taxas. O exemplo seguinte é uma versão simples de um problema de vazão bastante conhecido.

• O problema das torneiras

Se uma torneira enche um tanque em 60 minutos e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 30 minutos, em quanto tempo as duas torneiras juntas enchem o tanque?

Os leitores estão convidados a resolver mais esse problema, e para isso damos uma pequena "dica": a resposta não é a média harmônica de 60 min e 30 min, mas está relacionada a ela.

Problemas de torneiras são antiqüíssimos. Uma de suas versões aparece por exemplo na *Antologia grega* organizada por Metrodoro, um matemático grego que vivia por volta do ano 500 d.C. A tradução para o português seria mais ou menos a seguinte:

Eu sou um leão de bronze; de meus olhos, boca e pé direito jorra água. Meu olho direito enche uma jarra em dois dias, meu olho esquerdo em três dias, e meu pé direito em quatro dias. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas, diga-me quanto tempo os quatro juntos levarão para enchê-la?

Para finalizar esta seção, mais um problema.

• O problema do uísque

Durante 4 meses consecutivos, o sr. Mário comprou uísque para o bar de sua casa aos preços, respectivamente, de 16, 18, 21 e 25 reais por garrafa. Qual foi o custo médio do uísque para o sr. Mário nesse período todo?

Esse é um daqueles problemas que nos deixam frustrados, pois só depois de muita batalha notamos que faltam dados; temos necessariamente que introduzir alguma hipótese para poder resolver o problema.

i) Uma hipótese plausível é que, talvez por ser um bebedor regular, o sr. Mário tenha comprado a *mesma quantidade* x de uísque a cada mês.

Logo, ele despendeu

$$16x + 18x + 21x + 25x = 80x \text{ reais}$$

para comprar uísque no período. Daí, o custo médio no período de 4 meses foi de $80x/4x = 20$ reais por garrafa. Portanto, caso essa hipótese seja verdadeira, o custo médio no período é a *média aritmética* dos custos mensais.

ii) Uma outra hipótese plausível é que, talvez por não ter tido aumento de salário nesse período, o sr. Mário tenha gasto a *mesma quantia* y de reais a cada mês.

Logo, ele consumiu

$y/16 + y/18 + y/21 + y/28$ garrafas no período. Assim, o custo médio nesse período foi, aproximadamente:

$4y/ (y/16 + y/18 + y/21 + y/28) = 19{,}5$ reais por garrafa.

Portanto, neste caso, o custo médio no período é a *média harmônica* dos custos mensais.

Conclusão

Nosso passeio termina com um mergulho no mundo imaginário, por meio de um problema-narrativa, isto é, um problema de Matemática que, pela forma de sua apresentação, se configura também como uma narrativa, um conto, uma fantasia.

Há muito tempo, na Lemúria, um país que, por descuido dos cartógrafos, não aparece em atlas nenhum, a moeda oficial era o xelim. E, *como nessa época havia uma inflação galopante, seus habitantes tinham o hábito de comprar e vender dólares, quase todos os dias.*

Robson comprou dólares em três dias consecutivos: no primeiro dia, ao câmbio de 16 *xelins por dólar; no dia seguinte, ao câmbio de* 20 *xelins por dólar e no terceiro dia, ao câmbio de* 25 *xelins por dólar. Isso quer dizer que nesses três dias o doleiro vendeu dólares para Robson ao câmbio de* 1/16 *de dólar por xelim,* 1/20 *de dólar por xelim e* 1/25 *de dólar por xelim, respectivamente.*

No quarto dia, Robson, já se sentindo um cliente especial, propôs ao doleiro que ele vendesse dólares, não no câmbio do dia, mas na média aritmética dos câmbios dos três dias anteriores. Ele disse para o doleiro:

— Você faz a média aritmética das suas taxas de câmbio e me diz quantos dólares você me dá para cada xelim. Aí eu inverto e sei quantos xelins lhe pago para cada dólar que você me der.

O doleiro respondeu:

— Vamos simplificar as contas, Robson. Você comprou dólares nas taxas de 16, 20 *e* 25 *xelins por dólar. Aí você tem que me pagar* 61/3 *xelins por dólar, isto é, para cada lote de* 61 *xelins lhe dou 3 dólares.*

Aí Robson contestou: — Espere aí, eu faço as contas. Para cada xelim você me deu 1/16 *de dólar no primeiro dia,* 1/20 *de dólar anteontem e* 1/25 *de dólar ontem. Logo, você tem que me dar para cada xelim a média aritmética:* $(1/16 + 1/20 + 1/25)/3 = 61/1200$ *de dólar. Pago então* 1200/61 *xelins por dólar, ou seja, pago* 1200 *xelins para cada lote de* 61 *dólares.*

O doleiro retrucou: — Não é possível, você se enganou nas contas!

E ficaram discutindo um longo tempo, porque um não concordava com os cálculos do outro. E continuam discutindo até hoje, aguardando ansiosamente a passagem de *O Homem que Calculava ...*

Equações e inequações com radicais

Geraldo Ávila

Introdução

Muitos professores encontram dificuldades ao lidar com equações e inequações com radicais. Nosso objetivo aqui é o de chamar a atenção para a classe mais comum dessas equações e inequações, cujo tratamento repousa sobre certos pontos básicos que, quando levados em conta, evitam as dificuldades a que nos referimos.

Um primeiro equívoco

Outro dia procurou-me um professor, querendo entender o modo correto de resolver a seguinte equação: $x^2 = 16$. Perguntou-me então se estaria correto proceder assim: $x^2 = 16 \Leftrightarrow \pm x = \pm 4$, com quatro possibilidades de escolha de sinais: $+x = \pm 4$ e $-x = \pm 4$, resultando nas duas soluções $x = \pm 4$.

Com um balançar de cabeça, eu dei a entender que não aprovava. Ele insistiu: mas, professor, não é verdade que

$$\sqrt{x^2} = \pm x \quad \text{e} \quad \sqrt{16} = \pm 4\ ?$$

Aí eu fui bem explícito e disse: Não! não é bem assim.

De fato, às vezes escrevemos coisas como

$$\sqrt{16} = \pm 4\,,$$

mas isso não está certo. Trata-se de um "abuso de notação". Não existem coisas que os lingüistas chamam de "abuso de linguagem", "licença poética" e "licença literária"? Pois os matemáticos também incorrem em "abusos de notação" e de "linguagem". Não tem muita importância, pode até ser uma conveniência, mas é preciso ter consciência do que se está fazendo. Por exemplo, ao lidarmos com a função que leva x em $\sqrt{x}$, dizemos e escrevemos corretamente assim: "seja a função $x \to \sqrt{x}, \quad x \geq 0$ ". É um abuso de notação dizer "seja a função $y = \sqrt{x}$ ", pois, a rigor, essa última expressão é apenas um valor particular da função, aquele que ela assume no valor "x" da variável independente; além disso, nesse último modo de falar nem estamos especificando o domínio da função, deixando-o subentendido.

Voltando ao caso da raiz quadrada, escrever $\sqrt{16} = \pm 4$ é um abuso de notação porque o radical tem um significado único: sendo a um número positivo, $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada positiva, nunca a negativa (é claro que se poderia ter convencionado o contrário, isto é, $\sqrt{a}$ significando a raiz negativa, não a positiva). Tanto é assim que, quando escrevemos a fórmula de Báskara, tomamos o cuidado de usar o duplo sinal de mais e menos na expressão $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Como então resolver a equação proposta? Pelo que dissemos, $\sqrt{x^2}$ é o número positivo $|x|$, isto é,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(e nunca $\sqrt{x^2} = x$, pois x pode ser negativo).

Analogamente, $\sqrt{16} = 4$, de sorte que $x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$ e pronto, é isso aí! Na prática, costumamos suprimir a parte do meio e simplesmente escrever: $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Um outro exemplo

Vamos esclarecer melhor essas coisas, considerando a seguinte equação, um pouco mais complicada que a anterior:

$$\sqrt{4 - x} = x - 2. \quad (1)$$

É claro que, ao escrever essa equação, já estamos supondo que $4 - x \geq 0$, isto é, que $x \leq 4$. Para resolvê-la, elevamos ambos os membros ao quadrado, obtendo:

$$\sqrt{4 - x} = x - 2 \Rightarrow 4 - x = (x-2)^2 \Leftrightarrow 4 - x = x^2 - 4x + 4 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -x + 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } x = 3.$$

Dessas duas soluções, somente $x = 3$ resolve a equação inicial. Com o outro valor, $x = 0$, a equação inicial ficaria sendo $\sqrt{4} = -2$, que está errado, pois $\sqrt{4}$ significa sempre +2.

Na verdade, o outro valor encontrado, $x = 0$, é a solução da outra equação, aquela que leva sinal negativo, ou seja:

$$-\sqrt{4-x} = x-2. \quad (3)$$

Tanto essa equação, como a equação inicial, ao serem elevadas ao quadrado, implicam a mesma equação $4 - x = (x - 2)^2$. Essa, sim, tem duas soluções: $x = 0$ e $x = 3$, uma que é solução de $+\sqrt{4-x} = x-2$. e outra que é solução de $-\sqrt{4-x} = x-2$..

Com esse exemplo fica bem clara a importância de se convencionar que o símbolo $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada positiva de a, qualquer que seja o número positivo a, pois é necessário que tal símbolo tenha significado único e preciso sempre. Do contrário, a equação (1) não seria uma equação só, mas conteria também a equação (3), ou seja, estaríamos lidando com

$$\pm\sqrt{4-x} = x-2.$$

Temos duas equações, as quais, juntas, equivalem à segunda equação que aparece em (2), isto é,

$$\pm\sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow 4-x = (x-2)^2.$$

Observe que a primeira implicação em (2) é apenas da esquerda para a direita, não valendo a volta.

No fundo, o que estamos usando em nosso procedimento é a seguinte propriedade dos números:

se a *e* b *são números não negativos, então* $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

Como se vê, precisamos ter certeza de que os números a e b sejam não-negativos. Se não tivermos essa informação, só podemos escrever $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ (e nunca $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$).

Em nosso caso concreto, $a = \sqrt{4-x}$ e $b = x-2$

Podemos também escrever: se a e b são números quaisquer, então

$$a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$$

ou, ainda,

$$a^2 = b^2 \iff a = \pm b.$$

Observe que $a = \pm b$ é outro modo de dizer que a e b têm o mesmo valor absoluto, isto é, que $|a| = |b|$. Assim, com $a = \sqrt{4-x}$ e $b = x-2$, podemos escrever:

$$(\sqrt{4-x})^2 = (x-2)^2 \iff \left|\sqrt{4-x}\right| = |x-2|,$$

ou ainda, de maneira equivalente, $(\sqrt{4-x})^2 = (x-2)^2 \iff \pm\sqrt{4-x} = x-2$.

Para dar mais um exemplo de que o símbolo $\sqrt{a}$ deve significar apenas uma das raízes de a, considere a equação:

$$\sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{1+3x}.$$

E agora, a primeira raiz quadrada que aí aparece é positiva? Negativa? E a segunda? É justamente para evitar tais ambigüidades que convencionamos, de uma vez por todas, que o símbolo $\sqrt{a}$ significa sempre a raiz quadrada não-negativa de a.

Inequações e valor absoluto

Como se faz para resolver a inequação $x^2 < 9$? Será correto simplesmente extrair a raiz quadrada e escrever $x < 3$? Não, isso é errado, pois $x = -4$ é menor que 3, no entanto $(-4^2) = 16$ é maior do que 9.

Lembremos que x^2 é o mesmo que $|x|^2$, de forma que o correto é

$$x^2 < 9 \iff |x^2| < 9 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

Assim, a solução da inequação $x^2 < 9$ é o conjunto dos números do intervalo $(-3, 3)$.

O que usamos na resolução da inequação acima foi a seguinte propriedade dos números:

se a e b *são números não negativos, então* $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$.

Outro exemplo: $x^2 > 25$.

Temos, agora,

$$x^2 > 25 \Leftrightarrow |x^2| > 25 \Leftrightarrow |x| > 5.$$

As soluções são os números tais que $|x| > 5$. Ora, isso acontece com $x > 5$ ou $x < -5$.

A Linguagem Lógica

Iole de Freitas Druck

O trabalho com a Lógica durante o curso de Magistério não deve ser um ponto programático localizado em algum momento específico da estrutura curricular, mas sim deve ser uma preocupação metodológica presente sempre que algum ponto do programa permitir ou que o interesse da turma justificar uma exploração mais detalhada.

Trata-se de um tema com amplas conotações interdisciplinares e que se torna mais rico na medida em que for possível perceber o quanto a lógica permeia as conversas informais entre amigos, a leitura de jornais ou revistas e as diversas disciplinas do currículo – não é um instrumento só da Matemática.

O objetivo principal de um certo domínio da lógica é o do desenvolvimento da capacidade de usar e entender um discurso correto, identificando construções falaciosas, ou seja, incorretas, mas com a aparência de correção lógica. Desenvolver no aluno a capacidade de argumentar e compreender argumentos, bem como a capacidade de criticar argumentações ou textos.

Para perseguir este objetivo é menos importante ou motivante um curso de lógica formal ou aristotélica, e mais relevante a discussão de exemplos e contra-exemplos de “afirmações lógicas”. Aprende-se mais, talvez, resolvendo uma charada lógica ou percebendo que se pode chegar a uma conclusão falsa através de caminhos aparentemente lógicos do que, por exemplo, simples mente decorando uma tabela de verdade. Esta última não é uma arbitrariedade decidida por um gênio maluco – é uma necessidade do raciocínio correto, que só percebemos no uso concreto, com exemplos significativos. Assim, por exemplo, a resolução do problema "Uma Aventura de Alice", abaixo descrito, pode ser uma motivação interessante para a introdução das tabelas de verdade e ao mesmo tempo ser uma atividade instigante para os alunos:

Exercício 1

Uma Aventura de Alice

Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O Leão e o Unicórnio eram duas estranhas criaturas que freqüentavam a floresta. O Leão mentia às segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O Unicórnio mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

Problema 1

Um dia Alice encontrou o Leão e o Unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

A partir dessas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Problema 2

Em outra ocasião Alice encontrou o Leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei daqui a 3 dias.

Qual era o dia da semana?

Problema 3

Em qual dia da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei amanhã.

Problema 4

Em que dias da semana é possível o Leão fazer cada uma das seguintes afirmações:

(a) Eu menti ontem e eu mentirei amanhã.

(b) Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.

(c) Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.

(d) Menti ontem se, e somente se mentir amanhã.

Resolução:

Dia da semana	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	sáb.	dom.
Leão	M	M	M	V	V	V	V
Unicórnio	V	V	**V**	M	M	M	V

Problema 1

– Pela resposta do Leão, pode ser 2ª ou 5ª.

– Pela resposta do Unicórnio, pode ser 5ª ou domingo. Portanto, como os dois se referiam a um mesmo dia da semana, este era quinta-feira.

Problema 2

– Por (1), o dia poderia ser 2ª ou 5ª.

– Por (2), como o Leão mentirá 3 dias depois de hoje, hoje pode ser 2ª, 3ª, 4ª, 6ª, sábado, domingo.

Logo, o dia da semana era segunda-feira.

Problema 3

– A afirmação (1) pode ser feita 2ª ou 5ª.

– A afirmação (2) pode ser feita 4ª e domingo.

Portanto, não existe um dia na semana em que seja possível o Leão fazer as duas afirmações.

Problema 4

(a) Esta afirmação (que é uma conjunção) é uma mentira quando alguma das suas componentes for falsa, logo, como mentira, o Leão pode afirmá-la 2ª ou 4ª.

Por outro lado, ela será verdadeira somente quando suas duas componentes o forem, logo o Leão não poderá afirmá-la em nenhum dia em que fala a verdade.

Resposta

2ª ou 4ª (compare este exercício com o Problema 3 e explique por que eles são diferentes).

(b) Esta afirmação (que é uma disjunção) é mentirosa quando as suas duas componentes forem falsas, logo o Leão não poderá afirmá-la nos dias em que mente. Por outro lado, ela será verdadeira quando pelo menos uma das suas componentes o for, assim o Leão poderá afirmá-la na 5a ou no domingo.

Resposta

5ª ou domingo.

(c) Esta afirmação (que é uma implicação), composta de duas outras, só é falsa quando, sendo a primeira (premissa) verdadeira, a segunda (conclusão) for falsa. Logo, o Leão poderá fazer uma afirmação mentirosa somente na 4ª (na 2ª e na 3ª a afirmação é verdadeira – convença-se). Pelo mesmo motivo acima o Leão não poderá fazê-la na 5ª, dia em que fala a verdade. Nos demais dias de verdade ele poderá fazê-la (6ª, sábado e domingo), já que, a premissa sendo falsa, a implicação é verdadeira (pense nisso!). Resposta: 4ª, 6ª, sábado ou domingo.

d) Esta afirmação (que é uma equivalência) é verdadeira quando suas duas componentes forem verdadeiras ou quando forem as duas falsas. Assim, ela é uma mentira, dentre os dias em que o Leão mente, somente na 2ª ou na 4ª. Dentre os dias em que ele fala a verdade, ele poderá dizê-la somente na 6a ou no sábado.

Resposta

2ª, 4ª, 6ª ou sábado.

(Observação: Veja as tabelas de verdade no final do artigo.)

Existem vários livros ou revistas que contêm problemas do tipo “charada lógica”. Na bibliografia citamos alguns. Estes problemas podem ser usados aqui ou ali para chamar a atenção de alguns tipos mais comuns de “falha de lógica” num raciocínio, como por exemplo:

Exercício 2

Leia as seguintes afirmações:

(1) Se um político tem muito dinheiro, então ele pode ganhar as eleições.

(2) Se um político não tem muito dinheiro, então ele não pode ganhar as eleições.

(3) Se um político pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.

(4) Se um político não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.

(5) Um político não pode ganhar as eleições se ele não tem muito dinheiro.

Responda então:

(a) Assumindo que (1) é verdadeiro, quais das outras afirmações são verdadeiras?

(b) Qual é a negação de (1)? E a sua recíproca? E a sua contrapositiva?

(Veja "definições usadas", no final do artigo.)

(c) Mesmas perguntas para (5).

Resolução

(a) Sendo (1) verdadeiro, não se pode saber nada sobre a veracidade de (2), (3) ou (5) (observe que (2) e (5) afirmam a mesma coisa). A única que é verdadeira como decorrência de (1) é a afirmação (4).

(Observação: faça o exercício do final do artigo.)

(b) As definições dos conceitos aqui empregados estão também no final.

– A negação de (1) é: "Um político tem muito dinheiro e não pode ganhar as eleições".

(Exercício: utilizando as observações do final, verifique que as tabelas de verdade de

$\neg (P \to Q)$ e de $P \neg Q$ coincidem.)

– A recíproca de (1) é (3).

– A contrapositiva de (1) é (4).

(c) Sendo (5) verdadeira, (2), que é a mesma afirmação com outra maneira de escrever, também será obrigatoriamente verdadeira. Também (3), que é a contrapositiva de (2), será obrigatoriamente verdadeira. Nada se pode afirmar sobre a veracidade de (1) ou (4).

– A negação de (5) é: "Um político pode ganhar as eleições e não ter muito dinheiro".

– A recíproca de (5) é (4).

– A contrapositiva de (5) é (3).

Também se pode levar o aluno a compreender mais claramente a diferen ça entre a estrutura lógica existente num enunciado e o conteúdo propriamente dito deste enunciado por meio de exercícios, tais como:

Exercício 3

Decida quais das afirmações são válidas.

(a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos, logo nenhum pássaro é um girassol.

(b) Alguns livros são verdes e algumas coisas verdes são comestíveis. Concluímos que alguns livros são comestíveis.

(c) Como todos os peixes são mamíferos, todos os mamíferos são aves e existem minerais que são peixes, concluímos que existem minerais que são aves.

(d) Todos os homens são mortais. O presidente é um homem. Conclusão: O presidente é mortal.

(e) Alguns homens sabem nadar. Não existem peixes que não sabem nadar. Conclusão: Os peixes sabem nadar.

(f) Alguns santistas são surfistas. Alguns surfistas são loiros. Não existem professores surfistas.

Conclusões:

(1) Alguns santistas são loiros.

(2) Alguns professores são santistas.

(3) Alguns loiros são professores.

(4) Existem professores loiros.

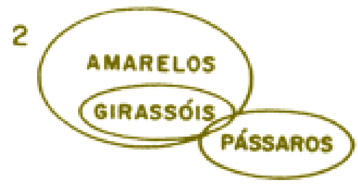
Resolução

Neste exercício os diagramas de Venn podem ser utilizados, como a seguir:

(a) Algumas configurações possíveis para as premissas do enunciado.

1

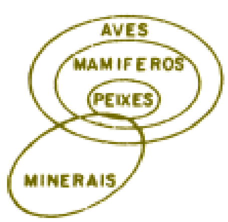
3



As configurações (2, 3 e 4) obtidas já nos permitem concluir que afirmação não é válida, pois existe modelo que torna a premissa verdadeira e a conclusão falsa. (Estas são as únicas configurações possíveis?)

b) Algumas configurações possíveis para as premissas do enunciado:

A configuração (2) nos permite concluir que a afirmação não é válida pelo mesmo motivo anterior. Encontre mais 3 configurações possíveis.

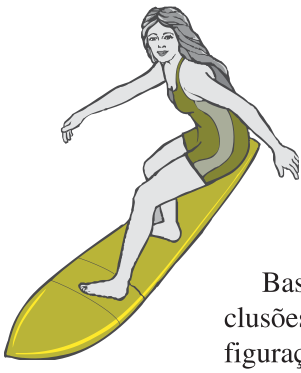


Todos aqueles minerais que forem peixes, pelo diagrama são necessariamente aves, logo a conclusão é decorrente das premissas e a afirmação é válida, apesar de poder haver outros diagramas cabíveis com a descrição das premissas – por exemplo, algum que não deixe nenhum mineral ser mamífero sem ser peixe. (Esboce um assim.)

Esta afirmação é chamada silogismo. O mais famoso deles, deixado por Aristóteles, falava de Sócrates, ao invés do presidente. E claramente válido.

(e) Esta afirmação é válida pois a conclusão é equivalente a uma das premissas.

(f) Alguns diagramas possíveis para as premissas do enunciado.



Bastam estes dois diagramas para vermos que nenhuma das quatro conclusões é válida com base nas premissas. Isso não impede que existam configurações em que todas as quatro sejam verdadeiras (faça exemplos de tais configurações onde todas as premissas sejam verdadeiras e as conclusões também). Mas para que uma implicação genérica deste tipo seja válida, não é possível que possamos exibir contra-exemplos como os acima. Uma afirmação destas só é válida quando for verdadeira em todos os modelos possíveis nos quais as premissas são verdadeiras.

Outras maneiras de trabalhar a lógica no curso de magistério são por meio de atividades interdisciplinares, seja com Física, Química, Português, História, Geografia, leitura crítica de textos de jornais ou mesmo de livros-textos das várias disciplinas.

Alguns dos tópicos do próprio currículo de Matemática são mais propícios ao uso de "demonstrações" ou "contra-exemplos" (na sistematização da Geometria notadamente) e, portanto, ao abordarmos estes tópicos, podemos sempre aproveitá-los para salientar a estrutura lógica subjacente em toda a Matemática.

Observações sobre o conteúdo lógico citado no texto:

Tabelas de verdade

Se P, Q são afirmações dadas, sendo que a letra F significa falso e a letra V significa verdadeiro, a tabela abaixo diz o valor (F ou V) nas afirmações compostas a partir de P e Q segundo o valor (F ou V) das próprias P ou Q:

		Negação	**Conjunção**	**Disjunção**	**Implicação**	**Equivalência**
P	Q	$\neg P$ não P	$P \wedge Q$ P e Q	$P \vee Q$ P ou Q	$P \rightarrow Q$ se P então Q P implica Q	$P \leftrightarrow Q$ P se e só se Q P é equivalente a Q
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Definições usadas

Dada uma afirmação P, chamamos a afirmação

“não P” ou “$\neg P$” de negação de P.

Dadas afirmações P e Q, chamamos de implicação à afirmação

“Se P então Q” ou “P implica Q” ou “$P \to Q$”.

Neste caso, a afirmação

“Se Q então P” ou “Q implica P” ou “$Q \to P$” é a sua recíproca e a afirmação

“Se não Q então não P” ou “não Q implica não P” ou “$\neg Q \to \neg P$” é a sua contrapositiva.

Exercício:

Prove que uma implicação é logicamente equivalente à sua contrapositiva, usando as tabelas de verdade, ou seja, prove que a afirmação:

“$(P \to Q)$ « $(\neg Q \to P)$” possui só V na sua tabela de verdade.

Prove também que uma implicação não é logicamente equivalente à sua recíproca, isto é, a afirmação “$(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$” possui V e F na sua tabela de verdade.

Prove ainda que a negação da negação é equivalente à própria afirmação, ou seja, que a afirmação “$\neg P \leftrightarrow P$” possui só V na sua tabela de verdade.

Capítulo 6

Ensino

Alunos inventam problemas

Sylvia Judith Hamburger Mandel

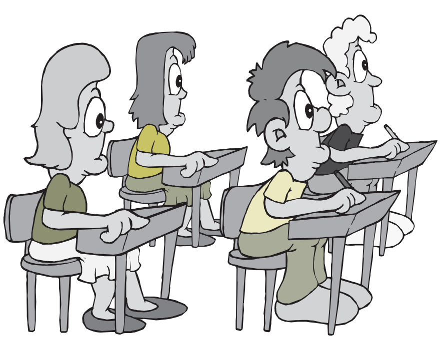
Luciana tem 3 namorados. No dia 12 de junho, dia dos namorados, ela recebeu 25 buquês. Oliver mandou o dobro de buquês de Amilcar, que mandou a metade de Henrique. Quantos buquês cada um mandou?
(Fernanda, Camila)

Na escola onde leciono (Nossa Senhora das Graças) o trabalho com problemas tem sido bastante enfatizado. Há muito tempo, diversos assuntos de Matemática vem sendo introduzidos através de problemas.

Nos últimos anos temos proposto aos alunos, desde a 1ª série, que também eles elaborem problemas.

O mecanismo dessa estratégia, os seus pontos positivos e alguns exemplos de problemas inventados pelos alunos serão o objeto deste artigo.

A estratégia



Introduzido um determinado assunto e tendo já resolvido alguns exercícios, propomos aos alunos que elaborem um ou dois problemas sobre o assunto.

A proposta é para que escrevam os problemas em duplas e os entreguem resolvidos, com os nomes dos autores. Esses problemas são datilografados e uma lista é distribuída a todos os alunos.

Muitas duplas entregam mais do que um problema. Sempre que possível, todos os alunos têm ao menos um de seus problemas incluído na lista. O pedido para que os problemas sejam feitos em duplas tem como objetivo evitar problemas demais, além de provocar um salutar intercâmbio entre os mais e os menos interessados, entre os mais e os menos hábeis e causar animadas discussões envolvendo Matemática.

Ao elaborar uma lista não há muita preocupação quanto à ordem dos problemas, exceto no caso de problemas muito trabalhosos, que vão para o final da lista. A variedade dos problemas propostos pelos alunos costuma ser maior do que a oferecida em livros didáticos, e a ausência de uma classificação por "tipo" é um dos aspectos positivos das listas. Os problemas também não se prendem a um só assunto - os alunos usam com freqüência outros conteúdos que já fazem parte do seu conhecimento.

Formular problemas é uma atividade dos alunos que deve ser realizada várias vezes ao longo do ano. A experiência nos mostrou que, com o passar do tempo, os problemas se tornam mais interessantes e criativos.

Autores: Alunos da 7ª série

Em sala de aula foi abordado o tema *Escalas,* e os alunos fizeram plantas da sala de aula, de seus dormitórios, do quarteirão da escola e resolveram diversos exercícios simples. Foram desafiados a escrever "problemas mais interessantes" do que os que foram propostos pela professora. Seguem-se alguns exemplos:

(a) *Num mapa de guerra a escala era* 1 : 100 000. *No mapa, o alcance do míssil era de* 100 cm. *Qual o alcance real do míssil em quilômetros?* (Bruno, Pedro)

(b) *Marcelo quer fazer a planta de seu quarto mas só tem uma cartolina de* 90 cm *por* 35 cm. *Sabe-se que as paredes do quarto de Marcelo têm as seguintes medidas:* 3m *por* 9*m. Qual seria a escala ideal para desenhar, ocupando a maior parte da cartolina?* (Manuel)

(c) *Um jogador de basquete mede* 2,04m. Para *fazer propaganda de seu time fizeram miniaturas do jogador. A escala é* 1:12. *Quanto mede a miniatura?* (Fernanda)

(d) *Eu fui a Nova Iorque e gostei da Estátua da Liberdade. Então, quando voltei para o Brasil, resolvi fazer uma réplica da estátua no meu quintal. A estátua do meu quintal media* 3*m* × 0,5*m. A estátua media* 15000mm × 2500mm. *Qual foi* a *escala que eu usei?* (Renata, Mariana)

(e) *Em um banheiro retangular precisa-se trocar os azulejos do box. O box é* 1/4 *do banheiro. O banheiro mede* 6m^2. *Na planta, o banheiro está na escala* 1 : 30. *Quanto mede o box na planta?* (Tatiana, Isabel)

O que há de positivo

– O fato de os nomes dos autores aparecerem nas listas desperta o interesse dos alunos. Eles procuram, de imediato, os problemas inventados por amigos, primos ou irmãos mais velhos (quando as listas foram elaboradas em anos anteriores). A componente pessoal de cada lista os faz tentar resolver com animação alguns dos problemas.

– Os tópicos abordados nos problemas refletem interesses pessoais dos alunos, como os esportes que praticam, os conjuntos de música de que mais gostam, preços de roupas, carros, video games, etc, tornando os enunciados mais significativos para eles.

– Não só os problemas fogem dos "tipos" mas também apresentam, às vezes, dados desnecessários, insuficientes ou contraditórios. Num livro didático, tais problemas seriam considerados fruto de descuido ou despreparo do autor e, como tais, seriam descartados. Nas listas, a ocorrência de um problema "defeituoso" é aceitável, e o problema é discutido como todos os demais. Discernir entre o que é necessário, e o que não é, faz parte da boa resolução de problemas em qualquer área, não só em Matemática.

– Como os próprios autores fornecem as respostas aos problemas propostos, algumas estão erradas. Os alunos se dão conta de que nem sempre uma discrepância no resultado é falha deles. Isso lhes dá maior segurança para resolverem problemas em outras situações. O erro passa a ser visto, por muitos alunos, como uma possibilidade e ocorrência natural.

– Ao propor problemas, os alunos são levados a pensar na linguagem que usam. Posteriormente, eles lerão com mais cuidado, e com espírito mais crítico, o problema escrito por um colega, o que, a médio prazo, promoverá um melhor entendimento de qualquer leitura que fizerem.

– Inventar problemas requer, às vezes, que o aluno pense de "trás para frente", isto é, se tal pergunta vai ser feita, que dados devem ser fornecidos?

Curiosidades

Algumas vezes, é necessário conversar com os autores sobre os problemas que criaram para evitar constrangimentos na sala de aula. Lembro-me, como exemplo, de um problema envolvendo o peso de uma garota gordinha. Esta, coincidentemente, criou um problema sobre quantos docinhos se podiam fazer com certo número de latas de leite condensado.

Numa outra turma, um grupo de meninos formulou um problema sobre o número de camisinhas que um tarado usava.

Outra vez, um grupo de alunos "micreiros" inventou um problema envol vendo a capacidade de memória de um computador, a quebra e conserto de diversas placas e o preço do conserto. O problema envolvia tantos cálculos, que nem os autores tiveram paciência de resolvê-lo. Haviam, no entanto, trabalhado e pensado muito ao elaborá-lo.

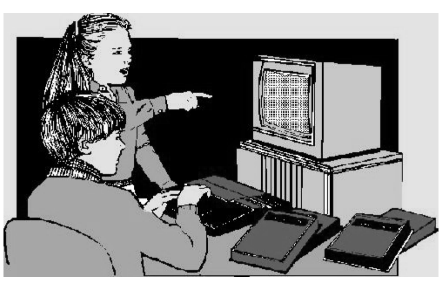
Observação final

Encaro a elaboração de problemas pelos próprios alunos como uma ferramenta adicional, muito valiosa, na tarefa de ensinar Matemática. Ela não substitui as muitas outras ferramentas que nós, professores, usamos. Ela é, sim, uma a mais para ser usada.

A Matemática na escola
Alguns problemas e suas causas

Roberto Markarian

O professor Roberto Markarian é um destacado matemático uruguaio, que tem realizado importantes trabalhos na área de Sistemas Dinâmicos. Embora suas atividades como professor situem-se no nível universitário, sua consciência de cidadão (que já lhe trouxe grandes dissabores durante uma ditadura militar) o leva a preocupar-se com os problemas de ensino no nível médio.



O objetivo principal deste artigo é escrever sobre alguns problemas e situações que se apresentam no aprendizado da Matemática no final do ciclo escolar, mas foi impossível fazê-lo sem me referir a algumas questões muito mais amplas, ligadas às dificuldades da Matemática e a seu aprendizado em geral. As subseções da primeira parte (o ensino da Matemática em geral) estão numeradas **1**, **2**, **3**, ... e as subseções do artigo em si estão ordenadas por letras maiúsculas **A**, **B**, **C**, ...

Estas notas carecem de exemplos detalhados, da experiência própria de trabalhar com crianças de aproximadamente 10 anos, mas podem ter a valia de quem lida e gosta de lidar com jovens cujas dificuldades de aprendizagem de dois qüinqüênios anteriores refletem-se em dolorosos traumas de estudo, e de quem fez do ensino e da pesquisa matemática a sua profissão.

O ensino da Matemática em todos os níveis apresenta-se como um problema insolúvel. Tem causas e manifestações distintas em países com diferentes graus de desenvolvimento econômico e cultural. Algumas têm componentes que são próprios dos países com menor desenvolvimento industrial ou menor independência agronômica ou com economias muito dependentes dos investimentos, das flutuações de mercado ou de políticas externas.

Poder-se-ia resumir a explicação do porquê de a disciplina ser motivo de tantas preocupações para alunos, professores e pais, nos seguintes três aspectos:

O subdesenvolvimento

Em nações onde a aplicação criativa do conhecimento para o desenvolvimento de novas tecnologias não constitui parte da mentalidade dominante, é difícil aumentar o prestígio e o reconhecimento das ciências básicas, necessárias para tais desenvolvimentos. Nesses países (incluso o do autor desta nota), os que marcam explícita ou implicitamente os rumos da evolução econômica, dos investimentos, da ocupação de mão-de-obra têm por orientação central a importação de maquinária ou técnicas e a sua adaptação ao terreno ou produção primária do lugar. Portanto, dificilmente eles promovem uma cultura na qual a criação de conhecimento autóctone, sustentado no conhecimento básico, ocupe um lugar destacado no desenvolvimento global.

Isso não significa que seu discurso, suas arengas etc. não sejam carregados de alentos à promoção das ciências e seu caráter nacional. Mas me refiro a aspectos mais substanciais, mais estruturais da sociedade e não somente ao que governantes ou líderes empresariais possam escrever ou dizer. De um modo mais claro e esquemático: em uma economia que não está baseada na criação de técnicas próprias para resolver os seus problemas, não há promoção do conhecimento científico e menos ainda da ciência mais abstrata, a de menor conteúdo fatual: a Matemática.

Como exemplo da importância do conhecimento básico para a criação de ciências e técnicas a fim de atender às necessidades autóctones (nacionais, diríamos agora), seria útil citar o que sucedeu na América Pré-Hispânica. O melhoramento do milho, a decisão de quando plantar, a introdução da roça como procedimento para ganhar novos terrenos cultiváveis, são invenções próprias que respondiam à geografia e aos meios disponíveis: foi criação autóctone de tecnologia. Esses progressos foram simultâneos com a criação de sistemas de contagem do tempo (calendário, saber astronômico), com a invenção de sistemas de numeração e de formas de linguagem escrita. Tudo isso é conhecimento básico, sem o qual aquelas necessidades agrícolas não poderiam ter sido satisfeitas. A invenção de tecnologia própria – incluindo a adaptação de técnicas conhecidas aos problemas, materiais, tradições do lugar – é impossível se não foram desenvolvidas vigorosamente as ciências básicas de tais tecnologias: Biologia, Física, Química, Matemática e os procedimentos que se situam entre essas ciências e suas aplicações.

A Matemática é difícil

O objetivo da Matemática é um tanto imperceptível. A abstração das propriedades quantitativas ou geométricas que caracterizam as primeiras noções estudadas nos cursos de Matemática constituem um processo de complicada assimilação. Pequenos erros nesse processo tornam muito difícil a assimilação de novos conceitos e procedimentos, gerando grandes traumas futuros. Por outro lado, a memorização de uma nomenclatura diferente e muito precisa introduz componentes que não são usuais na vida diária.

Por sua vez, tais formas de pensar, de poder "desmaterializar" os objetos, são parte de nossa relação com a natureza, o que nos diferencia de outros animais avançados. A compreensão de propriedades globais dos objetos que nos são apresentados não se faz por mera acumulação. Faz-se por reordenação, por associação de semelhanças, que são parte fundamental do conhecimento matemático. A aceitação e compreensão das dificuldades da Matemática e, por sua vez, da necessidade de sua aplicação são básicas para poder analisar o problema do ensino da Matemática em nível alto e com competência.

O ensino da Matemática é problemático

O grave problema do ensino da Matemática não é exclusividade dessa disciplina. Atualmente admite-se que todo o sistema educacional está em crise. Que a velocidade das mudanças nos grandes e pequenos processos introduziu imensas dificuldades na sistematização do conhecimento e, portanto, em sua divulgação e ensino. Sem ser muito rigoroso, pode-se dizer que a interação aluno-docente que caracteriza o aprendizado dá-se sobre a base do estado atual do conhecimento e está fortemente influenciada pelos interesses de ambas as partes. O docente, a parte conservadora dessa relação, a que representa o social, o adquirido, o que deve ser conservado (nesse sentido usei a expressão "conservadora"), tem grandes dificuldades para manter-se em dia com os conhecimentos. O estudante é sacudido por elementos alheios ao ensino formal: os meios de comunicação, a cultura de consumo, em alguns casos; o atraso cultural, a destruição da família, a pobreza endêmica, em outros; pior ainda, tudo misturado, muitas vezes. Para cumprir adequadamente sua função, o docente deveria saber como esses aspectos refletem-se no estudante, coisa que, na atualidade, em geral não acontece. A defasagem entre o que o docente tem para transmitir e o que o estudante espera receber gera um desinteresse que interfere de maneira fundamental no aprendizado.

As questões analisadas em **1** e **2** produzem efeitos característicos nas crises do ensino de Matemática. Há um processo de descrença da importância do conhecimento abstrato, beneficiado pelas questões econômicas e sociais a que nos referimos no começo e também pela cultura do lucro imediato, do “o que é bom é o que se pode consumir”. Tudo isso gera uma espécie de despreocupação e, em muitos casos, uma desnaturalização do conhecimento matemático. Com isso quero dizer que a excessiva ênfase nas motivações, em tornar atrativo o objeto do estudo, leva a um descuido do ensino da Matemática em si, das estruturas gerais e suas relações.

Por outro lado, as dificuldades da disciplina também se manifestam em freqüentes mudanças de programas, métodos pedagógicos e ênfases temáticas que dificultam a formação dos seus docentes. Esses não conseguem ajustar sua formação e atualização às mudanças da disciplina e às incrementadas (tanto em número quanto em qualidade) solicitações sociais. Nos últimos 30 anos, por exemplo, houve, de início, uma mudança acentuada para um ensino muito formalizado (que se decidiu chamar *Matemática Moderna*) e logo um forte questionamento de tais orientações. Isso causou, inclusive, rancores difíceis de superar entre adeptos de umas ou outras posições.

Tudo isso faz com que a Matemática seja mal ensinada em sua forma e conteúdo, o que constitui uma grave falha social. Do exposto acima fica claro que não sou dos que acham que tudo está nas mãos daqueles a quem ensinamos Matemática; também não creio que somente com um grande esforço pedagógico os problemas do aprendizado da Matemática possam ser solucionados. Porém, a percepção de nossas limitações não nos exime da obrigação de pensar, opinar, dar soluções a problemas tão angustiantes e de indubitável impacto cultural.

No restante deste artigo apresentarei, através de blocos temáticos, alguns dos problemas de aprendizagem da Matemática em crianças que estão finalizando o ensino primário (a 4ª série do ensino fundamental, no Brasil).

A. Prestígio do saber matemático e os temores que gera

O bom desempenho em Matemática é considerado, em geral, como uma mostra de sabedoria e inteligência. Consideram-se as pessoas que têm facilidade para Matemática como gente especial, com algum dom extraordinário: o saber matemático goza de prestígio. Isso se deve, por um lado, ao fato de que as dificuldades da disciplina fazem com que quem a sabe ou a aprende com facilidade seja visto como diferente, especialmente dotado; por outro lado, os jovens com particular facilidade para a Matemática, em geral, têm também facilidade para formar conceitos em outras disciplinas, para continuar a concatenação lógica de raciocínios, até para encontrar semelhanças em geografia, física, ...

Esse “prestígio”, por sua vez, gera em quem tem dificuldades uma aversão muito forte à Matemática. Sentem-se aparvalhados, passam a ignorar a beleza, a coerência e a ordenação da disciplina e a recusar qualquer tipo de formalização, por sua semelhança com a formalização matemática. É bastante comum que os estudantes com dificuldades sejam mais retraídos, sintam que não poderão ocupar papéis importantes em suas atividades ou obter ocupações de destaque e modernas. Consideram-se humilhados perante seus professores de Matemática e, mais adiante, muitos deles serão incapazes de ter uma base mínima para incorporar conhecimentos matemáticos ou meramente quantitativos, que lhes permitam avançar normalmente nos seus estudos.

B. Memória com detalhes

O conhecimento matemático inclui a memorização sistemática e classificada de uma quantidade muito grande de dados, de informação que deverá ser utilizada automaticamente: as tabuadas da multiplicação, os valores de algumas funções (trigonométricas, por exemplo), o significado e valores de muitos símbolos (π, por exemplo), equivalência entre diferentes unidades de medida, valores de raízes quadradas, fórmulas de comprimentos, áreas, volumes. Essa informação deve ser “guardada” com precisão, com detalhes: 3 vezes 8 não é “quase” 25 é 24; símbolos muito parecidos são distintos se cumprem funções diferentes; a vírgula dos números decimais deve ser colocada em um lugar exato, se desejamos representar um número dado, etc.

Tornar operativa, com velocidade, essa massa de informação é parte do conhecimento matemático. Quem tiver dificuldades para recordar algumas dessas informações elementares, dificilmente poderá acompanhar raciocínios mais complicados ou fazer exercícios que envolvam essas operações.

C. Procedimentos padronizados

Além da armazenagem de informação, o saber matemático inclui a realização de um número muito grande de operações e rotinas a serem aplicadas em ordem correta e com precisão. Nessas operações incluo certas propriedades de uso sistemático. Vejamos alguns exemplos: a comutatividade das operações elementares (cujo conhecimento diminui o número de resultados a recordar); “o símbolo + transforma-se em – ao passar uma parcela para o outro lado do símbolo =”; a realização de operações iterativas, em que a repetição é a chave do êxito (a divisão, por exemplo). Essa habilidade inclui também a boa utilização ou o adestramento na memória presente, para não ficar perdido no meio de um raciocínio de muitas etapas.

Essa capacidade para integrar diferentes informações e processá-las de maneira mais ou menos rotineira é também parte da boa formação em Matemática. A falta dessa capacidade gera a impossibilidade de saber o que fazer com objetos matemáticos usuais e como prosseguir com operações previamente estudadas.

D. Linguagem, símbolos e padrões

O aprendizado da Matemática depende muito de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos. Essas linguagens e simbolismos a tornam, por sua vez, mais inacessível. Pode-se dizer que são um “mal necessário”. É interessante observar que esses elementos decisivos no progresso da Matemática demoraram muito para se desenvolver com toda a força: consolidaram-se só no século XVI com o desenvolvimento da notação e do formalismo da Álgebra.

As dificuldades inerentes à linguagem e ao simbolismo matemáticos obrigam a tomar o devido cuidado na utilização de tais instrumentos no ensino. A linguagem em si não motiva; as idéias sim. Nenhum aluno pode interessar-se por algo em que não veja algum elemento que satisfaça ou aguce sua curiosidade. Isso é verdade inclusive para os matemáticos que contribuem para o desenvolvimento da sua ciência. Estão interessados nas idéias, métodos e técnicas que fazem parte da sua disciplina. Vamos introduzindo linguagens e simbolismos por necessidades práticas. O mesmo pode se dizer no ensino: introduzi-los quando se tornam necessários para auxiliar o aprendizado de coisas verdadeiramente relevantes.

Nessa categoria de problemas também entram os padrões, esquemas, palavras-chaves que o estudante deve poder reconhecer rapidamente para utilizar as técnicas adequadas. As representações geométricas, o reconhecimento de figuras ou de representação gráfica (colunas, diagonais, conjuntos de números), formam parte das perícias a que fazemos referência neste item. Esses procedimentos incluem doses muito grandes de abstração, pois esses padrões aparecem com apresentações explícitas ou visuais muito diferentes. A interpretação precisa, inclusive visual, de algumas definições abstratas é crucial para avançar na compreensão de diversos entes geométricos: circunferência, paralelas, equilátero.

A linguagem, os símbolos e os padrões matemáticos bem assimilados e utilizados sistematicamente em outras esferas da atividade e na ciência são ferramentas de comunicação e sistematização fundamentais. Enriquecem a capacidade de transmissão, simplificam modos de pensar, ajudam a chegar diretamente ao cerne dos problemas. Mais ainda, o bom manejo desses elementos na linguagem oral clarifica a apresentação de idéias complicadas e evita circunlóquios e rodeios na descrição de situações.

E. Lógica e conceitos

As cadeias de raciocínios, características da Matemática, são uma das questões principais que o estudante deve aprender. Bertrand Russel escreveu que, na realidade, a Matemática é um grande silogismo, e que uma vez dadas certas definições, grandes áreas da Matemática se constroem "pensando bem". Não concordo com essa idéia *in totum*: grande parte do que me propus a descrever na primeira parte do trabalho (em particular no item **1**) refere-se à **correspondência da Matemática com a realidade, ao seu caráter não arbitrário**. Porém, não é menos certo que o bom aprendizado da Matemática inclui os grandes elementos do raciocínio correto, da dedução possível, das dependências permitidas entre conceitos.

Essas virtudes do modo de pensar matemático não devem ser contrapostas às características antes anotadas, em particular à necessária memorização de definições e procedimentos; muito menos ainda nas etapas iniciais da educação.

O progresso na compreensão dos mecanismos lógicos necessita de um grau avançado de conceituação, especialmente nessas etapas formativas. É impossível raciocinar bem se os objetos do raciocínio não estão definidos com precisão, se não se conhecem os elementos que os constituem e seus limites. Muitas vezes uma dose generosa de memória pode esconder grandes carências em certas conceituações (somar quebrados sem saber muito bem o que representam as frações, por exemplo), mas freqüentemente essas carências aparecem, até porque com o passar do tempo tudo se esquece.

A capacidade de resolução de problemas está fortemente baseada nesses graus de conceituação e rigor lógico: identificação das perguntas colocadas, utilização de alternativas válidas, mudança de estratégia para atacar o problema, em razão do fracasso de algo utilizado previamente.

Ainda assim, as coisas devem caminhar no seu devido tempo. Do mesmo modo como na evolução das idéias, também no ensino os conceitos devem ser introduzidos à medida que vão sendo solicitados pelos tópicos ensinados, e o aluno esteja em condição de apreciar criticamente a importância do que está aprendendo. Caso contrário o resultado é negativo, pois, em lugar de estimular o aprendizado, produz o efeito de gerar desinteresse por uma Matemática que trata de objetos imperceptíveis, que não são necessários nem em sua estrutura intrínseca.

Nisso também a evolução da ciência dá bons exemplos: os matemáticos profissionais lidaram com funções durante quase dois séculos antes de chegar à sua definição geral. Somente deram uma definição precisa (com seus conteúdos e limites) quando a resolução de questões delicadas (de convergência) tornou isso absolutamente necessário. A introdução prematura de conceitos, como os de função injetora, sobrejetora, inversa, composta, sem a utilização adequada desses conceitos – e, portanto, sem revelar sua real importância – é um exercício gratuito que se exige do estudante. Gratuito e contraproducente.

F. Necessariamente estimativo

A resolução de problemas destaca, além dos aspectos lógicos e de conceituações anteriormente aludidos, a importância do quantitativo em Matemática: de saber estimar resultados e descartar soluções improcedentes. Assim como é inaceitável que quem faz cálculos para achar a velocidade de um ônibus obtenha como resultado 900 km por hora e não procure o erro, um aluno médio de Matemática, ao multiplicar sucessivamente três números de um algarismo, deve descartar resultados que envolvam milhares.

A realização de cálculos "grosseiros" deve ser incentivada pelos professores, ainda mais em tempos em que tais cálculos são feitos com pequenas máquinas, perdendo-se a noção de resultado aproximado, da estimativa. É inadmissível que o bom raciocínio, que a boa memorização etc. não se complementem com o resultado mais imediato do saber matemático: **saber quantificar fenômenos e acontecimentos, e operar com os números da quantificação**.

G. Caráter cumulativo

Por último, creio ser útil destacar o caráter cumulativo do conhecimento matemático. Esse aspecto é particularmente sentido pelos docentes dos ciclos superiores do ensino: as carências acumuladas, incluindo as carências de informação e de sistemática, geram imensas dificuldades na compreensão de novas idéias.

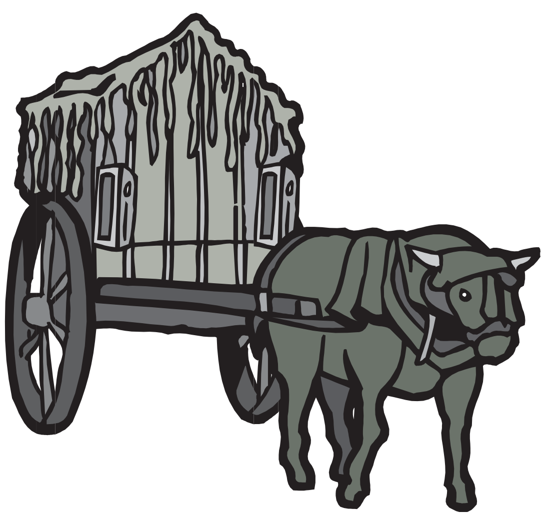
Expresso com os devidos respeitos, pode-se ser um excelente estudioso de ramos amplos da História sabendo-se pouco do papel de Carlos Magno na Idade Média, mas não se pode aprender Matemática nos últimos anos do ensino médio, se não se sabe somar frações. O saber matemático não tem a apresentação de um queijo Emental: uma deliciosa massa com grandes buracos. A evolução do aprendizado da Matemática nos ciclos primário e secundário (ensino básico) deveria de preferência ser uma massa uniforme cujos buracos seriam considerados como vazios a preencher.

Muitas vezes diminui-se a importância desse caráter cumulativo dos estudos da Matemática; considera-se uma exigência a mais dos professores, outra reivindicação dos aspectos globais da matéria. Não é assim. A boa compreensão dos conceitos anteriores, sua memorização, a prática, são quase imprescindíveis para entender razoavelmente as etapas mais avançadas. Facilita o aprendizado, consolida mais facilmente o novo. Todos os traços analisados entre **B** e **F** abonam a importância do acúmulo no conhecimento matemático. Peço ao leitor uma breve recapitulação desses itens para convencer-se de que carências em alguns aspectos refletem-se em debilidades em outros.

Espero que estas anotações sobre o ensino da Matemática sejam úteis para os leitores deste livro. De minha parte achei muito interessante e estimulante fazer essa ordenação sobre temas que, de outra maneira, só chamam minha atenção quando recebo as queixas que habitualmente se fazem sobre as dificuldades para compreender a disciplina.

A carroça na frente dos bois

Anamaria Gomide Taube



Recentemente fui abordada pelo meu filho Gustavo, de 9 anos, que ora inicia seus estudos na 4.ª série do ensino fundamental, com a seguinte questão que lhe havia sido encomendada como tarefa de casa pela professora. Esta solicitava que o aluno atribuísse um ''sim'' ou ''não'' ao enunciado: ''A operação de subtração, no conjunto dos números naturais, possui a propriedade de fechamento''.

Primeiramente fez-se necessário esclarecer o conceito de fechamento de um conjunto com relação a uma operação. Exemplifiquei dizendo que quando somamos dois números naturais obtemos um terceiro número natural como resultado daquela operação e portanto este conjunto é fechado para a adição. Foi então que fui surpreendida com a observação da criança: "mas mamãe, poderia dar outra coisa?" Naquele momento compreendi que o problema não estava somente na falta de compreensão do novo conceito, mas principalmente na inexistência de expectativa para um aluno da 4ª série com respeito a outros números que não os naturais, já que até aquele ponto ele nada sabia sobre números inteiros. Também não me pareceu lógico explicar o não fechamento do conjunto com relação à operação de subtração, baseado em uma situação que a seu ver nunca existiria. Como justificar, que, por exemplo, 2 – 5 não é um número natural se, para ele, realizar a subtração 2 – 5 é um procedimento impossível. Na verdade tornava-se evidente um impasse advindo da própria conceituação de operação, no caso, binária.

Uma operação binária sobre um conjunto A é uma função do produto cartesiano $A \times A$ em A. Conclui-se que para todo par ordenado (a, b) em $A \times A$, existe um e somente um elemento de A associado ao par através dessa aplicação. Neste caso, não faz sentido falar do fechamento do conjunto A em relação à operação pois esta deve poder ser efetuada sobre quaisquer dois elementos do conjunto dando como resultado necessariamente um elemento do conjunto. No entanto a propriedade do fechamento pode ser definida e verificada em subconjuntos de A. Podemos considerar um subconjunto S, não vazio, de A e a mesma operação binária definida em A e induzida sobre S. Efetuando a operação entre dois elementos quaisquer de S, existem duas possibilidades:

1. O resultado da operação é sempre um elemento de S. Neste caso dizemos que S é fechado para aquela operação;

2. Para algum par de elementos de S o resultado da operação não é um elemento de S (embora pertença a A). Neste caso dizemos que S não é fechado para aquela operação.

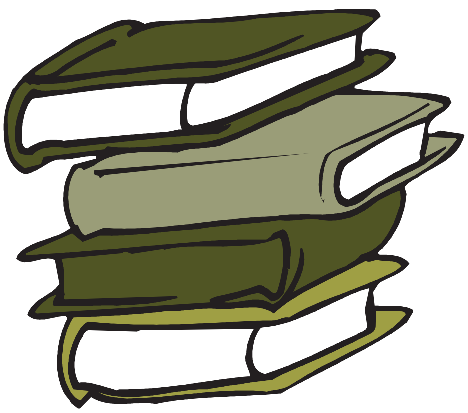
A compreensão, segundo este ponto de vista, do não fechamento da subtração requer o conhecimento do conjunto de números inteiros. A subtração no conjunto dos números naturais não é uma operação, mas sim uma propriedade da adição: "Dados a e $b \in N$ com $a \geq b$ existe um único $c \in N$ tal que $a = b + c$". c é a diferença entre a e b e escreve-se $c = a - b$.

Conclui-se, portanto, que o problema é conceitual, exigindo grande rigidez e formalização. Não é de se esperar que uma criança antes de completar a primeira década de vivência e aprendizagem esteja preparada e amadurecida para analisar, refletir, e compreender situações de tamanha abstração.

Cabe a nós, professores e pais, tentarmos estar sempre atentos para a forma de raciocínio objetivo, concreto e cristalino de nossas crianças. Antes que lhes sejam impingidas e cobradas listas de propriedades a respeito de um conceito novo, é imprescindível que lhes sejam fornecidos materiais em exemplos e exercícios e os mais diversos subsídios, para que, estimuladas pela curiosidade, percebam a existência de um universo bem maior do que aquele conhecido por elas. Depois elas mesmas irão deduzindo propriedades e tirando suas próprias conclusões. Tudo isso feito a seu tempo, caminhando sem atropelos, como os bois na frente da carroça, que lentamente efetuam o seu trabalho e atingem o seu objetivo.

Ensino no ensino fundamental (uma experiência)

Cristina Frade



Na tentativa de estimular o hábito da leitura e recuperar o valor e a utilidade do livro didático, venho, há alguns anos, desenvolvendo uma forma de trabalho pouco convencional com meus alunos de Matemática, da 5ª à 8ª série do ensino fundamental: a leitura e a interpretação de textos do livro de Matemática.

Hoje é consenso que o livro de Matemática tem sido aberto pelos alunos apenas para fazer exercícios. Eles têm deixado o ensino fundamental, incapazes de estabelecer contato com um texto escrito em linguagem matemática e, conseqüentemente, sem ter adquirido habilidades que considero fundamental no processo de aprendizagem: a independência e a maturidade para estudarem sozinhos.

Como é feito meu trabalho em sala de aula?

Dentre as muitas coleções de Matemática de 5ª à 8ª séries que existem no mercado, e às quais consigo ter acesso, escolho aquela que, a meu ver, coloca os conceitos matemáticos com maior precisão e clareza e é mais coerente em sua linguagem, do primeiro ao último volume.

De posse do livro-texto e do caderno de atividades (complemento do livro-texto com exercícios propostos), os alunos se reúnem, em grupos de dois, e o processo de estudo segue os seguintes itens:

1. leitura de determinada unidade;

2. discussão em grupo, à medida que a leitura se processa;

3. exercícios sobre o tópico estudado;

4. seminário orientado pelo professor, ao término do estudo da unidade, com a participação dos alunos;

5. resumo feito pelo professor, ressaltando as idéias mais importantes, ligando o que foi lido à unidade anterior e à posterior;

6. crítica do texto e sugestões para os autores.

Observação

Várias vezes deparei-me com conceitos ou exercícios resolvidos de modo impreciso. Quando isso ocorre, chamo a atenção sobre o fato, faço uma crítica, na esperança de que os alunos percebam a imprecisão e sugiro a substituição de um argumento por outro.

Para esclarecer melhor essa questão, darei como exemplo um fato ocorrido, no ano passado, numa turma da 7ª série, quando estudávamos *Sistemas de Equações do Primeiro Grau a Duas Variáveis.* No capítulo VI do livro-texto, havia um sistema a ser estudado:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{2}{x-3} \\ 2x + 5y = 11. \end{cases}$$

De acordo com o texto, o domínio de validade era

$$D = \{(x, y) \in IR \times IR \, / \, (x, y) \neq (3, 1)\}$$

o que não está correto.

Fiz perguntas aos alunos até que alguns perceberam qual deveria ser o domínio de validade correto. Perguntei quem se disporia a escrever uma carta aos autores, sugerindo a mudança necessária. No dia seguinte, recebi de um aluno a carta que transcrevo abaixo:

Prezados Editores,

Sou aluno de $7^{\underline{a}}$ *série do Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais, e faço uso do livro* Matemática, Conceitos e Histórias, *editado pelos senhores.*

Ao ler o capítulo VI deste, percebi um erro de edição no item 4.

Notem que o *domínio de validade do* $2^{\underline{o}}$ *exemplo do sistema da página 101 está errado.*

Esse domínio diz que $(x, y) \neq (3,1)$ e, dessa maneira, *dá-se* a entender que *o único resultado impossível desse* sistema *é o* par *ordenado* (3,1). Entretanto, qualquer resultado que tenha $x = 3$, ou $y = 1$*, será impossível. Pois se, por exemplo, o* resultado for (4,1), *o resultado será impossível, já* que y não pode ser igual a 1.

Assim, o certo seria colocar o domínio de validade da seguinte maneira:

$D = \{(x, y) \in IR \times IR \,/\, x \neq 3 \text{ e } y \neq 1\}$. Espero que concordem comigo.

É verdade que, no início desse trabalho, os alunos apresentam uma certa dificuldade em interpretar o texto e voltar a ele tantas vezes quantas forem necessárias para resolverem os exercícios. Isso acontece devido à falta de costume de ler um texto de Matemática.

Mas, à medida que o tempo vai passando, e eles vão se familiarizando com a linguagem, a atividade vai se tornando muito agradável. Os alunos não só gostam de trabalhar com o livro, como sentem que seus pais não jogaram dinheiro fora ao comprá-lo.

É certo, também, que esse trabalho reforça a importância da interpretação de texto, tão importante em Português, História e Geografia e enriquece qualquer metodologia de ensino.

Trabalhando desse modo, o professor estará tentando:

– incentivar o hábito da leitura;

– incentivar a independência de estudo do aluno;

– proporcionar maior participação do aluno nas aulas;

– desenvolver o espírito crítico da leitura (questionando o que se lê);

– despertar a capacidade do aluno para redigir um texto em linguagem matemática (mesmo para sugerir uma correção);

– apresentar-se ao aluno como um orientador, e jamais como o todo-poderoso detentor do saber.

E lá vamos nós de novo!

Flávio Wagner Rodrigues

Os leitores que estão hoje na casa dos 30, muito provavelmente tiveram seus primeiros contatos com a Matemática, aprendendo noções sobre conjuntos e estruturas algébricas. As idéias da chamada Matemática Moderna, que surgiram na década de 60, recomendavam que essas noções fossem introduzidas no início do aprendizado. Essa onda durou até o final dos anos 70 e teve opositores ferrenhos e defensores exaltados.

Na edição latino-americana da revista *Time*, de 25 de agosto de 1997, o cenário está pronto para uma nova batalha que promete repetir aquela que se travou, envolvendo a Matemática Moderna. Na reportagem intitulada *This is Math?* a revista descreve os novos métodos que vêm sendo utilizados nos Estados Unidos, especialmente no estado da Califórnia.

O objetivo seria tornar a Matemática mais interessante para o estudante, trocando a tabuada e a memorização de teoremas pela discussão de problemas em grupo, utilizando calculadoras e materiais didáticos apropriados.

O novo método, chamado de matemática *inventiva* ou *iterativa*, pretende ensinar as crianças a pensarem por si mesmas, contribuindo assim para desenvolver seu raciocínio matemático.

Os opositores, que chamam ironicamente o método de *new new Math*, argumentam que os estudantes podem estar gostando muito dos jogos e problemas, mas que é questionável se eles estão mesmo aprendendo alguma coisa.

O governo americano, que está investindo 10 milhões de dólares por ano no novo programa, espera que ele contribua para melhorar o desempenho dos estudantes americanos com relação aos seus colegas dos tigres asiáticos.

Para acalmar os pais enraivecidos que reclamam que bons estudantes precisam de uma calculadora para saber quanto é 10% de 470, o estado da Califórnia está propondo aulas tradicionais de Matemática como opção no currículo escolar.

É interessante observar que, quase sempre, situações como essa conduzem a uma radicalização de posições. De um lado, os proponentes do novo método, com o objetivo de convencer a comunidade (e também de obter recursos para o projeto), adotam a posição dogmática de que fora dele não existe salvação. Por outro lado, os oponentes partem do princípio de que as novas idéias não passam de um amontoado de asneiras. Do ponto de vista prático, isso impossibilita chegar a um consenso intermediário que permita o aproveitamento de uma ou outra eventual boa idéia que porventura o novo sistema possa conter.

Resta-nos aguardar os acontecimentos, lembrando a experiência passada com a Matemática Moderna e o filósofo Santayana, segundo o qual os povos que não aprendem com sua história estão fadados a repeti-la.